

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra Aplikované mechaniky

# Koncentrace napětí v hyperelastických materiálech

## Stress Concentration Factors in Hyperelastic Materials

Student:

Patrik Eiba

Vedoucí bakalářské práce:

doc.Ing.Stanislav Polzer,Ph.D

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta strojní  
Katedra aplikované mechaniky

## Zadání bakalářské práce

Student: **Patrik Eiba**  
Studijní program: **B2341 Strojírenství**  
Studijní obor: **3901R003 Aplikovaná mechanika**  
Téma: **Koncentrace napětí v hyperelastických materiálech**  
**Stress Concentration Factors in Hyperelastic Materials**  
Jazyk vypracování: **čeština**

Zásady pro vypracování:

- 1) Provést řešerši základních konstitutivních modelů pro popis hyperelastických materiálů
- 2) Provést analytický výpočet pro stanovení napětí za podmínek konečných deformací pro zvolené konstitutivní modely
- 3) Provést konečnoprvkové analýzy jednoduchých koncentrátorů napětí jako zápichů nebo osazení a analyzovat vliv různých hyperelastických materiálů na součinitel koncentrace napětí v závislosti na deformaci

Seznam doporučené odborné literatury:

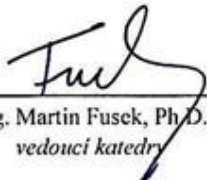
- [1] Mary C. Boyce and Ellen M. Arruda (2000) Constitutive Models of Rubber Elasticity: A Review. Rubber Chemistry and Technology: July 2000, Vol. 73, No. 3, pp. 504-523
- [2] Mattard MM and Hunt GW (2004) Hyperelastic constitutive modeling under finite strain. Int J Sol Struc 41:5327-5350.
- [3] Lopez-Pamies O (2010) A new II-based hyperelastic model for rubber elastic materials. Vompres Renduz mecanique

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Stanislav Polzer, Ph.D.**

Datum zadání: 21.12.2018

Datum odevzdání: 20.05.2019

  
Ing. Martin Fusek, Ph.D.  
vedoucí katedry

  
prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.  
děkan fakulty



**Místopřísežné prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 20.5.2019.....

  
.....

podpis studenta

Prohlašuji, že:

- Jsem si vědom, že na tuto moji závěrečnou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. Zákon o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (dále jen autorský zákon), zejména § 35 (Užití díla v rámci občanských či náboženských obřadů nebo v rámci úředních akcí pořádaných orgány veřejné správy, v rámci školních představení a užití díla školního) a § 60 (Školní dílo),
- беру на вѣдомі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo užít tuto závěrečnou bakalářskou práci nekomerčně ke své vnitřní potřebě (§ 35 odst. 3 Autorského zákona),
- bude-li požadováno, jeden výtisk této bakalářské práce bude uložen u vedoucího práce.
- s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 Autorského zákona,
- užít toto své dílo, nebo poskytnout licenci k jejímu využití, mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše)
- беру на вѣдомі, že – podle zákona č.111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů – že tato bakalářská práce bude před obhajobou zveřejněna na pracovišti vedoucího práce, a v elektronické podobě uložena a po obhajobě zveřejněna v Ústřední knihovně VŠB-TUO, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 20.5.2019.....



.....  
podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce:

Patrik Eiba

Adresa trvalého pobytu autora práce:

U brány 2

Mohelnice 789 85

## **Poděkování**

Touto formou bych chtěl poděkovat mé ženě za velkou podporu a ohleduplnost. Dále bych chtěl poděkovat vedoucímu práce doc. Ing. Stanislavovi Polzerovi, Ph.D. za odborné rady a vedení při vypracování této bakalářské práce.

Jméno a příjmení autora práce:

Patrik Eiba

Adresa trvalého pobytu autora práce:

U brány 2, Mohelnice

## ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Eiba, P. *Koncentrace napětí v hyperelastických materiálech: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra Aplikované mechaniky, 2019, Vedoucí práce: Polzer, S.

Tato bakalářská práce je zaměřena na představení hyperelastických materiálů a jejich rozdělení do konstitutivních modelů. Seznámení, kde se hyperelastické materiály využívají, jak se chovají při různých zatíženích a jakým způsobem mohou být vyrobeny. Dále se zaměřuje na získávání konstant ze zkušebních zkoušek. Ve výpočtové části je řešena závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření konečnou prvkovou metodou.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Hyperelasticita, elastomery, konstitutivní modely, součinitel koncentrace napětí, přetvoření, metoda konečných prvků

## ANNOTATION OF BACHELOR THESIS

Eiba, P. *Stress concentration Factors in hyperelastic materials. Bachelor Thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied mechanics, 2019, Thesis head: Polzer, S.

This bachelor thesis is focused on presentation of hyperelastic materials and their division into constitutive models. Getting to know where hyperelastic materials are used, how they behave at different loads, and how they can be made. Furthermore, it focuses on obtaining constants from the tests. In the computational part the dependence of the stress concentration factor on the deformation by the finite element method is solved.

## KEY WORDS

Hyperelasticity, elastomers, constitutive models, stress concentration factor, strain, finite element method

## Obsah

Seznam použitých veličin a symbolů .....	9
1 Úvod .....	12
2 Hyperelasticita .....	13
3 Teorie malých deformací .....	14
4 Teorie velkých deformací .....	17
4.1 Tenzory přetvoření .....	19
4.2 Tenzory napětí .....	21
5 Hyperelastický materiál .....	23
5.1 Elastomery .....	24
5.2 Termosetové elastomery .....	25
5.3 Termoplastické elastomery .....	25
5.4 Pryž .....	26
6 Výroba a využití hyperelastických materiálů .....	27
6.1 Přírodní kaučuk .....	27
6.2 Syntetický kaučuk .....	27
6.3 Butadienový kaučuk (BR) .....	28
6.4 Styrenový butadienový kaučuk (SBR) .....	28
6.5 Využití .....	28
7 Přehled konstitutivních modelů respektujících velká přetvoření .....	29
7.1 Konstitutivní modely .....	30
8 Stanovení konstant pro hyperelastické modely .....	33
8.1 Zkouška jednoosé napjatosti .....	34
8.2 Zkouška dvouosé napjatosti .....	35
8.3 Zkouška tření .....	36
8.4 Zkouška rovinnýn smykem .....	37
8.5 Objemová zkouška .....	38
8.6 Zkouška jednoduché komprese .....	39

8.7	Metoda Shore .....	40
9	Úvod do MKP .....	43
9.1	Odvození hlavní rovnice MKP .....	44
10	Součinitel koncentrace napětí .....	45
11	Výpočetní modely .....	46
11.1	Jednotlivé modely .....	47
12	PREZENTACE VÝSLEDKŮ.....	48
12.1	Porovnání analytického výpočtu s výpočtem numerickým .....	48
13	MODEL AA.....	51
13.1	MODEL AA – POMĚR AA1 .....	51
13.2	Konvergence sítě.....	52
13.3	MODEL AA – POMĚR AA2 .....	54
13.4	MODEL AA – POMĚR AA3 .....	55
13.5	MODEL AB.....	56
13.6	MODEL AC.....	57
13.7	MODEL BA.....	58
13.8	MODEL BA – POMĚR AA1 .....	58
13.9	MODEL BA – POMĚR AA2 .....	59
13.10	MODEL BA – POMĚR AA3 .....	60
13.11	MODEL BB .....	61
13.12	MODEL BC .....	62
13.13	MODEL CA-vliv materiálu .....	63
14	Závěr .....	65
15	POUŽITÁ LITERATURA.....	66



## SEZNAM POUŽITÝCH VELIČÍN A SYMBOLŮ

$A_0$	[m]	Plocha pístu
$a_i$	[m]	Deformované souřadnice Eulerova kontinua
$B$	[-]	Matice přetvoření
$BR$	[-]	Butadienový kaučuk
$C$	[-]	Cauchy-Greenův tenzor deformace v maticovém tvaru pomocí hlavních směrů protažení.
$C_{ij}$	[-]	Složky pravého Cauchy-Greenova deformačního tenzoru
$C_L$	[-]	Levý Cauchy-Greenův tenzor deformace
$C_R$	[-]	Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace
$C_{10}, C_{20}, C_{30}$	[Pa]	Materiálové parametry
$D$	[-]	Matice materiálových konstant
$d$	[-]	Parametr stlačitelnosti materiálu
$E$	[Pa]	Youngův modul.
$E^L$	[-]	Green-Lagrangeův tenzor deformace
$E^C$	[-]	Cauchyho logaritmický tenzor přetvoření
$E_{ij}$	[-]	Složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření
$F_{ij}$	[-]	Tenzor deformačního gradientu
$F_t$	[N]	Vektor působících zatížení
$G$	[Pa]	Modul pružnosti ve smyku
$I_1$	[-]	Modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace
$I_2$	[-]	Modifikovaný druhý invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace
$\bar{I}_1, \bar{I}_2$	[-]	Modifikované invarianty Cauchy-Greenova tenzoru

$J$	$[-]$	Třetí invariant tenzoru deformačního gradientu
$K$	$[Pa^{-1}]$	Objemový modul pružnosti
$k$	$[J \cdot K^{-1}]$	Boltzmanova konstanta
$K_t$	$[-]$	Součinitel koncentrace napětí
$L$	$[m]$	Deformovaná délka vzorku
$L_0$	$[m]$	Originální délka vzorku
$N$	$[-]$	Matice posuvů
$n$	$[-]$	Počet molekulárních řetězců v jednotkovém objemu
$P$	$[Pa]$	Tlaková síla pístu
$p_i$	$[-]$	Vektor vnějšího zatížení
$S$	$[m^2]$	Plocha deformovaného tělesa
SBR	$[-]$	Styren butadienový kaučuk
$S_{ij}$	$[Pa]$	Složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí
$S_i$	$[Pa]$	Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu
$T$	$[^{\circ}]$	Absolutní teplota
$T_{\sigma}$	$[-]$	Tenzor napjatosti
$T_{\varepsilon}$	$[-]$	Tenzor přetvoření
$V$	$[-]$	Objem deformovaného tělesa
$W$	$[J/m^3]$	Hustota deformační energie
$x_i$	$[m]$	Deformované souřadnice Lagrangeova kontinua
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	$[-]$	Poměrná protažení
$\sigma$	$[Pa]$	Jednoosé napětí
$\varepsilon$	$[-]$	Deformace
$\mu_p, \alpha_p, d_p$	$[-]$	Materiálové parametry
$\lambda_L$	$[-]$	Limitní protažení řetězce

$\mu$	[-]	Poissonova konstanta
$\sigma_i$	[Pa]	Cauchyho tenzor napětí
$\tau_i$	[Pa]	Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu
$\sigma_{max}$	[Pa]	Maximální nominální napětí
$\sigma_{nom}$	[Pa]	Nominální napětí
$\sigma_{red}$	[Pa]	Redukované napětí
$\nu$	[-]	Součinitel napjatosti
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	[Pa]	Hlavní napětí
$\sigma_{in}$	[Pa]	Vektor vnitřních napětí tělesa
$u_i$	[-]	Vektor deformačních posuvů
$\Theta$	[-]	Vektor deformačních parametrů

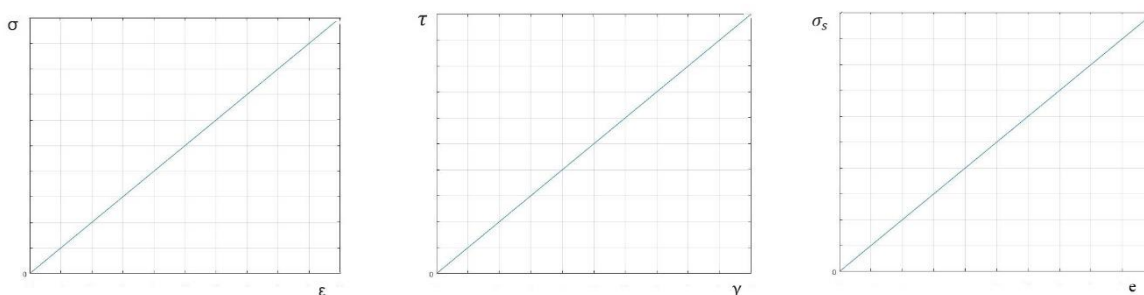
# 1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je analyzovat vliv konečných deformací na součinitel koncentrace napětí u zvolených vrubů. Nejdříve je však nutné provést alespoň základní představení hyperelastických materiálů a konstitutivních modelů, které se k jejich popisu používají. Práce také obsahuje stručný popis, jak se hyperelastické materiály vyrábějí, k čemu je můžeme použít a jak se chovají při zatížení. Představíme si experimentální zkoušky pro získání konstant pro hyperelastické modely a vysvětlíme si jaký je rozdíl mezi malými a velkými deformacemi.

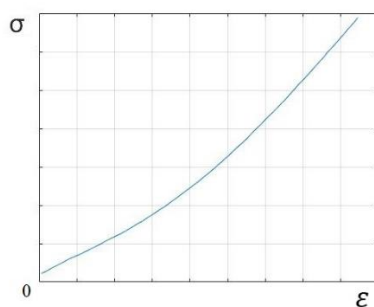
Výpočtová část práce se nejdříve zabývá analytickým výpočtem napětí ze známé energie napjatosti za podmínek konečných deformací pro zvolený konstitutivní model. Dále je pak provedena konečnoprvková analýza na tělesech s různými vruby a je analyzována závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření.

## 2 Hyperelasticita

Hyperelasticitu můžeme chápat jako vlastnost. Díky této vlastnosti je materiál schopný snášet velmi velké elastické deformace a po odlehčení působící síly se materiál ihned vrací do počátečního stavu. Tyto deformace jsou větší než nekonečně malé deformace. Tedy v praxi větší jak 1 %. Podle tvaru deformačně-napěťové charakteristiky tyto látky dělíme na lineárně a nelineárně elastické.



Obrázek č. 1 – Charakteristika lineární elastické látky



Obrázek č. 2 – Charakteristika nelineární elastické látky

Proto je velmi důležité si představit rozdíl mezi velkými a malými deformacemi, což bude rozepsáno dále.

### 3 Teorie malých deformací

#### Napjatost

Lze definovat pomocí množiny obecných napětí ve všech řezech, které jsme schopni vést daným bodem tělesa. [1] Napjatost v daném bodě tělesa nám určuje 9 složek napětí. Jsou to  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ . Tento stav napjatosti jsme schopni přepsat do maticového tvaru, který se nazývá Tenzor napjatosti  $T_\sigma$ . [1]

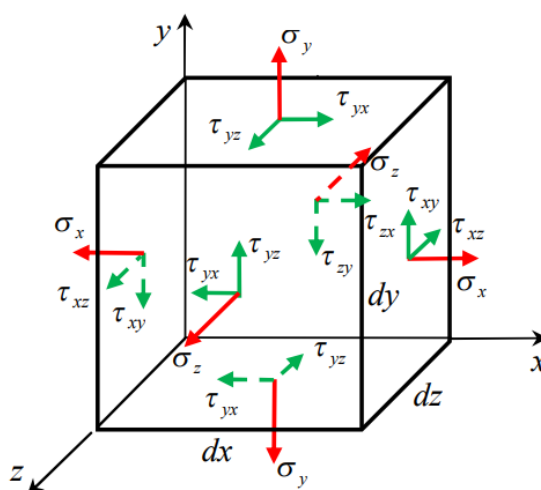
Vypadá následovně (1)

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Jednotlivé sloupce v matici odpovídají vždy dané rovině elementární krychle. Zápis smykových složek tenzoru lze zjednodušit. (2)

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|, |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}| \quad (2)$$

Napětíový stav můžeme tedy popsat pomocí šesti složek napětí.  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  [1]



Obrázek č. 3 – Napjatost tělesa <sup>1</sup>

## Přetvoření

Jelikož jsme schopni definovat tenzor napjatosti, obdobně můžeme popsat tenzor přetvoření. Je definován šesti složkami deformace, kde napětím  $\sigma$  odpovídají tři složky poměrné deformace  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  a třem smykovým složkám, které jsou definované jako napětí poloviční hodnoty zkosu  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ . [1] Tenzor přetvoření opět přepíšeme do maticového tvaru. (3)

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

## Inženýrský tenzor přetvoření

Tento tenzor lze použít pouze v případě, kdy je změna rozměru tělesa mezi výchozím a deformovaným tvarem zanedbatelná. Hranice použitelnosti tohoto tenzoru je 1 % přetvoření. Je vhodný pro analýzu konstrukcí. Inženýrský tenzor lze definovat (4)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (4)$$

## Hookův zákon

Definuje nám pružnou deformaci materiálu působením síly, při uvažování malých sil a malých přetvoření, které po odlehčení působící síly zmizí. Pokud budeme na těleso působit silou, naše těleso se prodlouží z počáteční délky  $l_1$  na délku  $l_2$ . Rozdíl  $\Delta l = l_2 - l_1$ , který nám vznikne, nazýváme poměrným prodloužením. Pokud budeme postupně zvětšovat velikost deformačních sil, můžeme sledovat závislost napětí  $\sigma$  na přetvoření  $\varepsilon$ . Dá se tedy říci, že normálové napětí je přímo úměrné poměrné deformaci. [1] [8] [11]

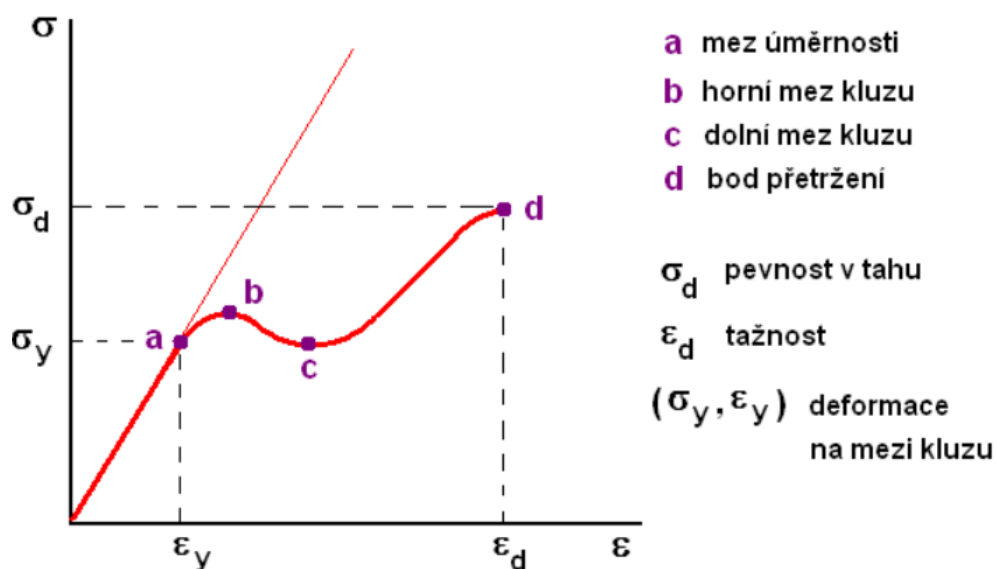
Vztah pro hookův zákon (5)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (5)$$

$\varepsilon$  – poměrné délkové prodloužení,  $\sigma$  – mechanické napětí,  $E$  – Youngův modul pružnosti

## Modul pružnosti

Také znám jako Youngův modul. Lze ho popsat jako veličinu, která definuje vztah mezi napětím (síla na jednotku plochy) a deformací v materiálu. Nejčastěji se popisuje pomocí křivky napětí-deformace. [1] [8]



Obrázek č. 4 – Křivka napětí – deformace <sup>8</sup>

Modul pružnosti je definován: (6)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (6)$$

$E$  – Youngův modul pružnosti,  $\sigma$  – Jednoosé napětí, nebo jednosměrná síla na jednotku povrchu,  $\epsilon$  – Deformace nebo proporcionální deformace (změna délky dělená původní délkou)



## 4 Teorie velkých deformací

V mechanice se vyskytují dva základní zdroje nelinearity. Jsou to materiálové a geometrické nelinearity. [8] [6]

### Materiálová nelinearita

Je charakterizována jako skutečnost, že chování materiálu je popsáno nelineárními vztahy napětí-deformace. Jedná-li se pouze o malé posuvy a malá přetvoření, hovoříme o pouhé materiálové nelinearitě

### Geometrická nelinearita

Tato nelinearita je způsobena velkými posuvy a natočeními, v důsledku velkých přetvoření. Rozlišujeme dvě základní nelinearity. [6]

- Velké posuvy – můžeme je chápat jako posuvy a rotace.
- Velká přetvoření – vždy obsahují velké posuvy.

### Velké posuvy

Pokud těleso zatížíme, vykazuje velká posunutí, případně rotace. Deformace jsou malé. V této situaci se objemový element tělesa posune a natočí, ale jeho deformace jsou malé. Pro popis takového stavu můžeme použít Cauchyho geometrické rovnice. [1] [2]

### Velká přetvoření

K velkým posunům a rotacím musíme přidat i velké deformace. V lineární pružnosti nám vystačil inženýrský tenzor přetvoření (4). V nelineární oblasti nám inženýrský tenzor nestačí a je nutné použít komplikovanější tenzory. Tyto tenzory přetvoření můžeme definovat několika způsoby podle toho, kterou geometrickou konfiguraci tělesa považujeme za základní. Tyto konfigurace jsou popsány pomocí pohybu kontinua. [2] [6] [8]

## Popis pohybu kontinua

Pokud chceme popsat pohyb kontinua slouží k tomu dva základní přístupy.

- Lagrangeův popis
- Eulerův popis

### Lagrangeův popis

Popisuje, jak se materiálové částice pohybují prostorem.

$$x_i = x_i(a_j, t) \quad (7)$$

Mezi nezávislé proměnné Lagrangeova popisu patří počáteční poloha a čas.

### Eulerův popis

Obdobně jak Lagrangeův, popisuje pohyb materiálových částic, avšak bodem, který je vytčen v prostoru. Za nezávislé proměnné se považují souřadnice okamžitého stavu. Přesněji řečeno je to okamžitá poloha bodu v čase a samotný čas. [2] [8]

$$a_i = a_i(x_j, t) \quad (8)$$

## 4.1 Tenzory přetvoření

### Green-Lagrangeův tenzor

Základem tohoto tenzoru deformace je původní nedeformovaná konfigurace a zároveň je respektováno natáčení elementu. [2]

Vztah je definován (9)

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \quad (9)$$

### Tenzor deformačního gradientu

Pomocí tohoto tenzoru jsem schopní popsat transformaci mezi aktuálním stavem a výchozí geometrií. [2] Hlavními složkami nejsou deformace, ale poměrná protažení. (10)

$$\lambda_x = \frac{\partial x}{\partial X}, \lambda_y = \frac{\partial y}{\partial Y}, \lambda_z = \frac{\partial z}{\partial Z} \quad (10)$$

Deformační gradient F v obecném souřadnicovém systému můžeme zapsat. (11)

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Poměrnou změnu objemu nám udává třetí invariant J deformačního gradientu F. [2] Což plyne z následujícího vztahu. (12)

$$e = \frac{dx \cdot dy \cdot dz - dX \cdot dY \cdot dZ}{dX \cdot dY \cdot dZ} = \frac{\partial x}{\partial X} \cdot \frac{\partial y}{\partial Y} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} - 1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 - 1 \quad (12)$$

Je důležité si uvědomit, že deformační gradient jako tenzor nelze použít jako míru přetvoření, protože je považován za neobjektivní (Pokud se těleso pohybuje jako tuhý celek, jeho složky jsou nenulové). Pomocí základu tohoto tenzoru jsme schopni odvodit další tenzory přetvoření. [2] [3] [8]

## Cauchyho (logaritmický) tenzor přetvoření

Tento tenzor je oproti předchozímu mnohem exaktnější, a to v tom, že infinitezimální přírůstek délky se vždy vztahuje k aktuální délce v dané části zatěžování. Pokud si představíme přímku o původní délce  $X_{i0}$ , kterou zatížíme a její přetvoření se vlivem tohoto zatížení mění na aktuální hodnotu  $X_i$  a až dosáhne konečné deformované délky  $X_{jk}$ , tak jsme schopni určit přetvoření pomocí integrace přírůstku její délky. [2] [3]

Vztah je (13)

$$E_i^C = \int_{X_{i0}}^{X_{ik}} \frac{dx_i}{x_i} = \ln x \Big|_{x_{i0}}^{x_{ik}} = \ln X_{ik} - \ln X_{i0} = \ln \left( \frac{X_{ik}}{X_{i0}} \right) = \ln \lambda_i \quad (13)$$

## Cauchy-Greenův tenzor deformace

Obdobně jako tenzor deformačního gradientu, tak i Cauchy-Greenův tenzor nepracuje s přetvořeními, ale s poměrnými protaženími. Díky deformačnímu gradientu můžeme odvodit dva Cauchy-Greenovy tenzory. [2] [8]

1) Pravý Cauchy-Greenův tenzor (14)

$$C_R = F^T \cdot F \quad (14)$$

2) Levý Cauchy-Greenův tenzor (15)

$$C_L = F \cdot F^T \quad (15)$$

Jako hlavní souřadnice tohoto tenzoru jsou považovány kvadráty poměrných protažení v hlavních směrech. (16)

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

V hlavním souřadnicovém systému jsme schopni invarianty tenzoru vyjádřit následovně (17, 18, 19)

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (17)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (18)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \quad (19)$$

Obdobně jako u deformačního gradientu nám třetí invariant vyjadřuje změnu objemu. Dále existují modifikované invarianty Cauchy-Greenova tenzoru (20), které slouží pro popis tvarové složky měrné energie napjatosti. [7] [8]

$$\bar{I}_1 = I_1 J^{-\frac{1}{3}}, \quad \bar{I}_2 = I_2 J^{-\frac{2}{3}} \quad (20)$$

## 4.2 Tenzory napětí

### Cauchyho tenzor napětí

Často označovaný jako Eulerův a z praxe ho můžeme znát pod názvem skutečné napětí. Tento tenzor je definován pomocí skutečné elementární síly, která je vztažena ke skutečné deformované ploše elementu. [2]

Pro hlavní napětí platí (21)

$$\sigma_i = \frac{dF_i}{dx_j * dx_k} \quad (21)$$

## Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu

Taktéž označovaný jako Lagrangeův nebo Piolův z praxe známe jako smluvní napětí. Tento tenzor je definován pomocí skutečné elementární síly, která je opět vztažena na původní ale nedeformovanou plochu elementu. [2]

Vztah pro hlavní napětí (22)

$$\tau_i = \frac{dF_i}{dX_j * dX_k} \quad (22)$$

## Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu

Bývá také označován jako Kirchhoffův. Tento tenzor je definován pomocí elementární síly  $dF_{0i}$ , která je vztažena na původní (nedeformovanou) plochu elementu. (23)

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j * dX_k} \quad (23)$$

Samotný tenzor nemá zásadní fyzikální význam, avšak využívá se kvůli jeho symetrii pro velká přetvoření. Další jeho vlastností je, že tenzor je energeticky konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorem přetvoření. [2] [8]

## Energeticky konjugované tenzory

Pro jednoznačné určení energie napjatosti musíme pracovat s navzájem si odpovídajícími tenzory přetvoření a napětí. Pokud si navzájem odpovídají, můžeme je prohlásit za energeticky konjugované. Přesněji řečeno to jsou vzájemně přiřazené dvojice tenzorů napětí a přetvoření, díky jejich kombinaci jsme schopni i v případně velkých přetvoření a posunů dostat energii napjatosti. [2]

- Green-Lagrangeův tenzor přetvoření a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
- Právý Cauchy-Greenův tenzor deformace a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

## 5 Hyperelastický materiál

Materiál je považován za hyperelastický právě tehdy, pokud existuje elastická potenciální funkce  $W$  (měrná deformační energie), která je skalární funkcí některého tenzoru přetvoření. [2] Pokud známe funkci  $W$  a derivujeme ji podle přetvoření, dostaneme hledané napětí (24).

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \quad (24)$$

$S_{ij}$  – jsou složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí,  $W$  – je funkce měrné energie napjatosti na jednotku nedeformovaného objemu,  $E_{ij}$  – jsou složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření

Funkci měrné deformační energie  $W$  můžeme definovat pomocí invariantu tenzoru přetvoření nebo hlavních poměrných protažení. (25)

$$W = W(I_1, I_2, I_3\{M\}) \text{ nebo } W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\{M\}) \quad (25)$$

$I_i$  – invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru,  $\lambda_i$  - hlavní protažení,  $M$  – materiálové konstanty

Rozdíl oproti lineárnímu elastickému materiálu je ten, že vztah pro napětí v hyperelastickém materiálu pochází z funkce hustoty deformační energie  $W$ , nikoliv z konstantního faktoru, mezi který patří Youngův modul pružnosti  $E$  a Poissonova konstanta  $\mu$ . [7] To nás vede k myšlence, že hyperelastický materiál je materiál nelineární a vztah mezi napětím a deformací je také nelineární. Avšak existují zvláštní případy, kdy hyperelastický materiál může být lineárně elastický. V lineární oblasti pro jednoosou napjatost můžeme vyjádřit funkci měrné energie ve tvaru. (26)

$$W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (26)$$

Pokud tuto funkci opět derivujeme podle přetvoření (pro malé deformace pomocí smluvního přetvoření  $\varepsilon$ ), dostaneme odpovídající složku napětí. (27)

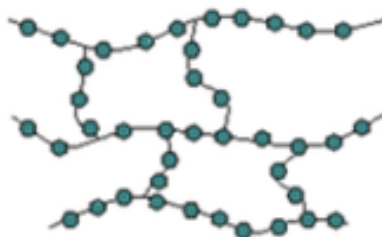
$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial (\frac{1}{2} \sigma \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial (\frac{1}{2} E \varepsilon^2)}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{2} E \varepsilon = \sigma \quad (27)$$

Obdobně můžeme napětí vyjádřit i pro víceosou napjatost.

Chování hyperelastických materiálu je složitější a není totožné s chováním kovových materiálů, protože při všech typech zatěžování projevují velmi odlišné chování. [6] Samotné chování je popsáno pomocí konstitutivních modelů. Hyperelastické materiály jsou definované pomocí konstant, které jsme schopni získat z experimentálních zkoušek. Nejčastěji to jsou jednoosý tah, čistý smyk a dvouosá napjatost. [6] Hyperelastické materiály jsou elastomery, pěny, ale také mezi ně patří biologický materiál jako jsou tkáně a svaly.

## 5.1 Elastomery

Jsou to materiály, které jsou vyrobeny z polymerů. Tyto polymery jsou spojeny chemickými vazbami, které poté získávají konečnou zesíťovanou strukturu. Za jejich hlavní vlastnosti můžeme považovat velkou tažnost a pružnost. Hlavním představitelem elastomerů je guma neboli pryž. Dále to mohou být různé sloučeniny jako silikon, neopren a polyuretanová lepidla. Podle rozložení a zároveň podle stupňů chemických vazeb můžeme elastomerní materiály rozdělit do tří základních skupin. Na obrázcích (5), (6) a (7) lze vidět tři základní elastomery, kde kuličky představují funkční skupinu, například  $\text{CH}_2$  a jsou spojeny vazbami. [8] [10]

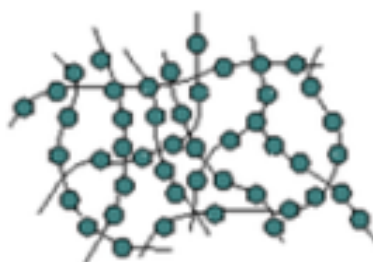


Obrázek č. 5 – Elastomer v základním tvaru <sup>10</sup>



## 5.2 Termosetové elastomery

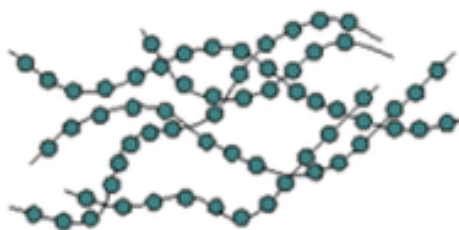
Jsou to vytvrzené materiály za pomoci tepla, vhodným zářením, vysokým tlakem nebo smícháním s katalyzátory. Díky vytvrzení to vede k chemickým reakcím, které vytvářejí rozsáhlé zesíťování mezi polymerními řetězci. V důsledku hustého zasíťování jsou vhodné pro aplikaci při vyšších teplotách až do teploty rozkladu. Čím vyšší je zasíťování, tím vyšší je odolnost vůči teplu. S hustotou zasíťování se také zvyšuje, zlepšuje mechanická tuhost a tvrdost, avšak na úkor toho, že se materiál při deformování a nárazech lehce poruší. Je to z toho důvodu, že materiál před porušením absorbuje málo energie. [8] [10]



Obrázek č. 6 – Termosetový elastomer s hustým zasíťováním <sup>10</sup>

## 5.3 Termoplastické elastomery

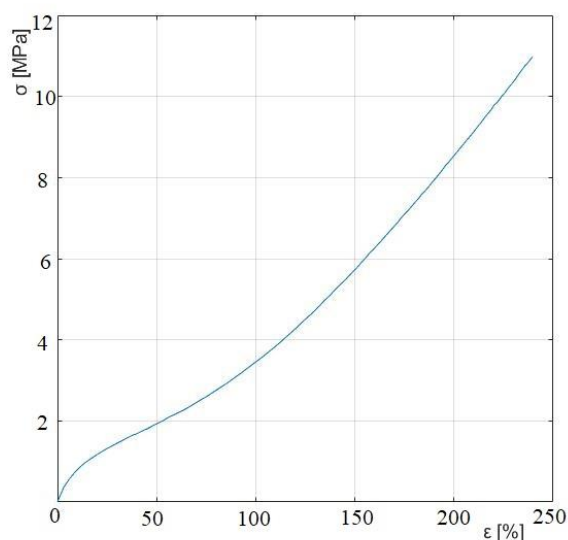
Je to plastový polymerní materiál, který se stává tvarovatelným při určité zvýšené teplotě a tuhne po ochlazení. Tento polymer je složen z lineárních makromolekul s dlouhými řetězci. Tyto řetězce jsou drženy u sebe pouze mezimolekulárními interakcemi. Po zahřátí tyto interakce slábnou a polymer měkne. Při dalším zvyšování teploty dosáhne kapalného stavu. Termoplasty se považují za viskózní kapaliny. Přesnou teplotu tání nelze určit, protože je polymer složen z makromolekul různých délek, které přecházejí do kapalné fáze při různých teplotách. Termoplasty se řadí mezi dobře zpracovatelné materiály, protože jsme schopni je při určitých teplotách odlévat nebo lisovat. [8] [10]



Obrázek č. 7 – Termoplastický elastomer s dlouhými řetězci <sup>10</sup>

## 5.4 Pryž

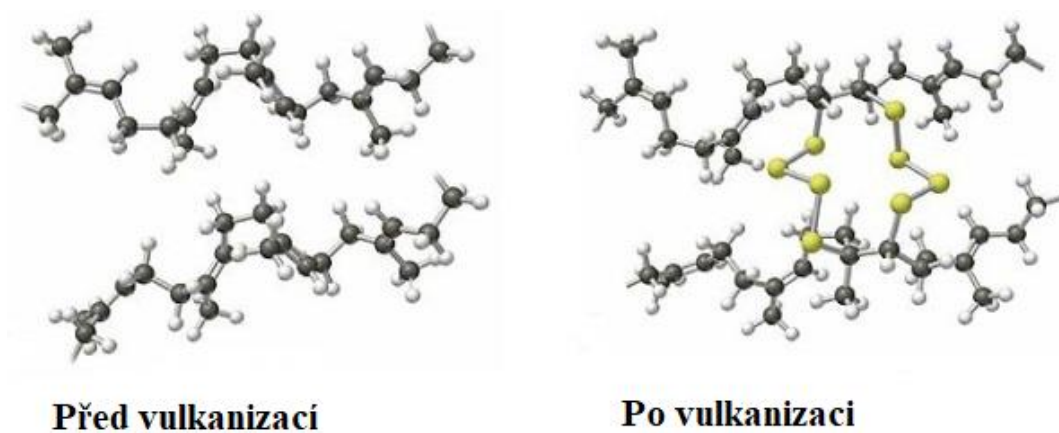
Mezi hlavní materiál pro výrobu pryží patří syntetický nebo surový přírodní kaučuk. Pokud ke kaučuku přidáme síťovadla a vystavíme ho teplu a tlaku, vznikne nám pryž. [8] Tento proces se nazývá vulkanizace. Kaučuk v nevulkanizovaném stavu se nazývá guma. Díky vulkanizaci se zlepšují vlastnosti materiálu. Co se týče pryže, mezi její hlavní vlastnosti



patří velké deformace, nelineární vztah mezi napětím a deformací, nestlačitelnost a tlumící vlastnosti. [8] [9]. Na obrázku č.8 můžeme vidět klasický průběh pro tahovou zkoušku pryže. Z tahové zkoušky lze vidět, že na počátku křivky se projevuje pokles tuhosti materiálu a při zvýšení napětí nám tuhost materiálu začne stoupat. Nastává natahování makromolekulárních řetězců, které se začnou zpevňovat.

Obrázek č. 8 – Tahová zkouška pryže

Molekuly kaučuku v surovém stavu můžeme popsat jako dlouhé řetězce, které jsou zamotané a slabě propojené. Pokud provedeme vulkanizaci a přidáme atomy síry, dosáhneme vyššího počtu křížových vazeb. [9] [12]



Obrázek č. 9 – Rozdíl mezi vulkanizací a nevulkanizací <sup>11</sup>

## 6 Výroba a využití hyperelastických materiálů

Zde si představíme výrobu a využití přírodního kaučuku v praxi a dva hlavní představitele syntetického kaučuku.

### 6.1 Přírodní kaučuk

Samotná výroba začíná v přírodě, kde musíme ze stromů nashromáždit latex pomocí gumového poklepání. Přesněji to znamená vytvořit široký řez ve tvaru V v kůře stromu. Latex se nashromáždí v nádobě. Poté se filtruje a reaguje s kyselinou mravenčí nebo octovou, aby částice kaučuku koagulovaly. Kaučuk vyrobený tímto způsobem se poté lisuje na desky, který se dále suší horkým kouřem. Po vysušení je připraven na další fázi výroby. Další krok se nazývá mastikace, kde stroje upravují kaučuk pomocí mechanických lisů a válců. Díky tomuto procesu je kaučuk měkkší, lépe se zpracovává a má lepší lepicí vlastnosti. Dále se přidávají chemické složky, které vedou ke zlepšení vlastností. V další fázi je kaučuk roztážen do požadovaných tvarů pomocí válců nebo je upravován vytlačováním. Nakonec probíhá vulkanizace. [9] [12]

### 6.2 Syntetický kaučuk

Syntetický kaučuk je jedním z typů pryže. Jedná se o bílou, drobivou plastickou hmotu, která se zpracovává a vulkanizuje stejným způsobem jako přírodní kaučuk. Jinými slovy je to uměle vyrobený materiál, který má vlastnosti podobné přírodnímu kaučuku. Hlavní surovinou pro výrobu syntetického kaučuku jsou petrochemické suroviny (ropa). Pro výrobu syntetických kaučuků se také používají dva druhy plynu. Jedná se o butadien, který se používá pro výrobu butadienového kaučuku a styren, který se používá pro výrobu Styren butadienového kaučuku. Samotný butadien je vedlejším produktem rafinace ropy a styren je zachycen v procesu koksování. Když jsou tyto dva plyny smíchány v přítomnosti (soapudů) v reaktoru, vznikne nám kapalný latex. Ten se nakonec promývá a suší. V závislosti na přidaných chemikáliích a vlastnostech, které jsou s nimi spojeny, může být syntetický kaučuk stejně tvrdý jako bowlingová koule nebo měkký jako houba. [8] [12]

### **6.3 Butadienový kaučuk (BR)**

Tento kaučuk je polymerizovaný butadien a často se používá v kombinaci s jinými typy pryže, jako je přírodní kaučuk. Největší zastoupení BR je v pneumatickém průmyslu. Dále se používá jako přísada pro zlepšení mechanických vlastností plastů. Mezi jeho hlavní vlastnosti patří vysoká elasticita, odolnost proti opotřebení, nízká hystereze a dobrá flexibilita při okolních teplotách. Nevýhoda BR je nízká odolnost vůči abrazi a deformaci v tlaku. [8] [12]

### **6.4 Styrenový butadienový kaučuk (SBR)**

Vzniká kopolymerací dvou sloučenin (styren a butadien) v přítomnosti katalyzátoru. Obdobně jako BR se používá pro výrobu pneumatik. Má podobné chemické a fyzikální vlastnosti jako přírodní kaučuk. Vyniká dobrou odolností proti oděru a stabilitou stárnutí, pokud je chráněn příslušnými přísadami. Není příliš odolný vůči oxidaci a olejům. [8] [12]

### **6.5 Využití**

Jak víme, kaučuky vynikají velkou tuhostí a odolností vůči oděru, proto jsou vhodné pro vložky do čerpadel a nádrží. Protože jsme schopni kaučuk vyrobit měkký i tvrdý (viz Shore), jeho využití je velmi rozsáhlé. [8] Měkký se používá například pro výrobu ochranných rukavic, lepidla a barvy. Tvrdší kaučuky mají využití jako střešní fólie a vodotěsné vložky. Díky tomu, že je kaučuk špatný vodič tepla a výborný izolant, používá se pro výrobu obalového materiálu pro elektrické kabely. [9] [13]

## 7 Přehled konstitutivních modelů respektujících velká přetvoření

Jak už víme, konstitutivní modely slouží pro popis chování hyperelastických materiálů. Deformační odezva hyperelastického materiálu může být izotropní nebo anizotropní. [2] Funkce měrné deformační energie je definována pomocí invariantů tenzoru přetvoření a proto jsou modely izotermické. Určité konstitutivní modely byly vytvořeny na základě struktury elastomeru (Neo-Hookean, Arruda-Boyce). Jiné konstitutivní modely byly vytvořeny na základě makroskopického chování elastomeru. Například (Mooney-Rivlin, Ogden) jsou považované za fenomenologické modely. [2] [8]

U všech hyperelastických konstitutivních modelů je potřeba oddělovat tvarovou a objemovou složku deformace. Jedinou výjimkou, kde se toto rozdělení nemusí dodržovat, je Hookův zákon. Protože platí princip superpozice v lineární závislosti. [2]

### Objemová složka

Změna objemu, která má vliv na energii napjatosti se nejčastěji popisuje třetím invariantem tenzoru gradientu deformace a také je popsána konstantou (například objemový modul pružnosti). Samotná změna objemu je malá oproti změně tvaru a díky tomu si vystačíme s lineární definicí. [2]

### Tvarová složka

Tvarové změny jsme schopni popsat za pomoci modifikovaných invariantů z některého tenzoru přetvoření. Naším cílem je separování tvarové změny (deviátorové složky tenzoru) od objemové změny (kulová složka tenzoru). [2]

## 7.1 Konstitutivní modely

### Model Neo – Hookean

Tento model nebere v úvahu disipativní uvolňování energie jako tepla při namáhání materiálu a předpokládá se dokonalá pružnost ve všech fázích deformace. Dále je tento model založen na statistické termodynamice zesíťovaných polymerních řetězců a je použitelný pro plasty a gumy. Jelikož je tvarová změna popsána pouze jednou elastickou konstantou, je tento model vhodně použitelný pouze do 30 % přetvoření, kdy nelinearita není příliš vysoká. [2] [8]

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru. (28)

$$W = \frac{G}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (28)$$

$G$  – počáteční modul pružnosti ve smyku,  $\bar{I}_1$  – modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  $d$  – parametr stlačitelnosti materiálu, daný vztahem  $d = \frac{2}{K}$ , kde  $K$  – je objemový modul pružnosti,  $J$  – třetí invariant tenzoru deformačního gradientu

$$\text{Platí, že: (29)} \quad G = 2nKT \quad (29)$$

$n$  – počet molekulárních řetězců v jednotkovém objemu,  $k$  – Boltzmanova konstanta,

$T$  – absolutní teplota

### Model Mooney-Rivlin

Elastická odezva gumovitých materiálů je často modelována pomocí tohoto modelu. Rivlinův model je obvykle platný pro přetvoření menší než 100 %. Model může být 2, 5 a 9 parametrický. [2] [8] Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru. (30)

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (30)$$

C10 a C01 – materiálové parametry,  $\bar{I}_1$  – modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  $\bar{I}_2$  – modifikovaný druhý invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  $d$  – parametr stlačitelnosti materiálu, daný vztahem  $d = \frac{2}{K}$ , kde  $K$  – je objemový modul pružnosti

## Model Ogden

V počátku byl tento model formulován jako nestlačitelný. U jednoosého namáhání vykazuje vynikající predikační schopnost (do cca 70 %). Model je spolehlivý i pro extrémně velké deformace. [2] [8] Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru. (31)

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} - 3) + \sum_{p=1}^N \frac{1}{d_p} (J - 1)^{2p} \quad (31)$$

$\mu_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $d_p$  – jsou materiálové parametry. Samotný exponent nemusí splňovat podmínku kladné nebo celočíselné hodnoty,  $\bar{\lambda}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – modifikovaná hlavní poměrná protažení, složky levého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  $J$  – třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Pro obecný Ogdenový modul je počáteční modul pružnosti ve smyku definován. (32)

$$G = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \alpha_p * \mu_p \quad (32)$$

Objemový modul pružnosti  $K$  je pro počáteční stav definován. (33)

$$K = \frac{1}{d_1} \quad (33)$$

## Model Arruda-Boyce

Od předchozích modelů se odlišuje tím, že vychází ze struktury materiálu, které jsou tvořené zvlněnými vláknitými řetězci makromolekul elastomeru. [2] Při protažení dochází k napřimování řetězců a to vede ke zvyšování tuhosti elastomeru. Tento model je založen na hexagonální buňce (krychli), kde rohy jsou propojené se středem pomocí osmi molekulárních řetězců a je často popisován jako osmi řetězcový. [2] [8]

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru. (34)

$$W = G \left[ \frac{1}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20 * \lambda_L^2}(\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050 * \lambda_L^4}(\bar{I}_1^3 - 27) + \frac{19}{7000 * \lambda_L^6}(\bar{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{673750 * \lambda_L^8}(\bar{I}_1^5 - 243) \right] + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right) \quad (34)$$

$\lambda_L$  – limitní protažení řetězce

Pokud se limitní parametr pro protažení řetězce blíží k nekonečnu model se nám redukuje na model Neo – Hookean. [2]

## Model Yeoh

Tento model vychází z Mooney-Rivlinovy formulace. Yeoh nevyužívá druhého deformačního invariantu.

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru. (35)

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i \quad (35)$$

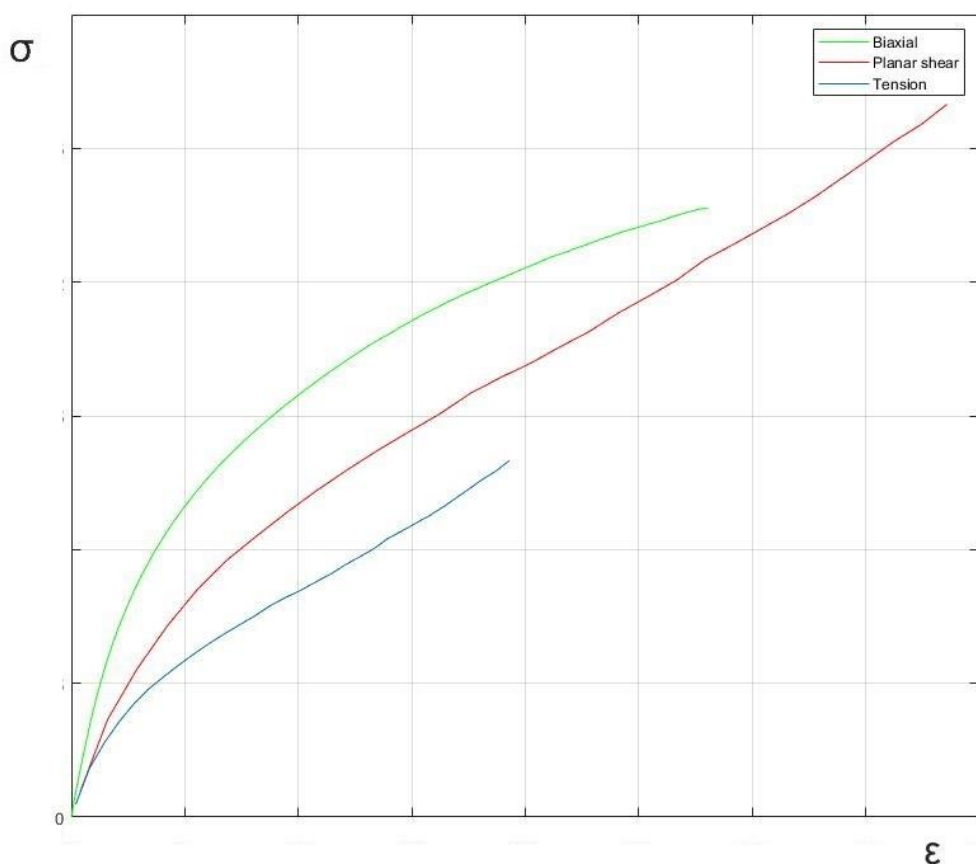
$C_{i0}$  – materiálová konstanta, N – libovolné hodnoty, ale obvykle nejsou vyšší než 3

Pokud je  $N = 1$ , jedná se o model Neo – Hookean. Často je tento model uvažován s  $N = 3$ . Tříparametrový model nám poskytuje dobré výsledky pro deformace ve velkém rozsahu, i když nemusí být přesný pro nižší hodnoty deformace.



## 8 Stanovení konstant pro hyperelastické modely

Lineární modely jsou definované pomocí Youngova modulu pružnosti  $E$  a Poissonovy konstanty  $\mu$ . Tyto konstanty lze bez problému zjistit pomocí standardních testovacích strojů pro jednoosé zkoušky. Pokud se budeme soustředit na stanovení konstant pro nelineární hyperelastické modely, budeme potřebovat dosáhnout dalších módů zatížení. Pro tyto speciální typy zatížení je zapotřebí speciálních strojů a vybavení. Pro získání přesných parametrů pro hyperelastické modely je nutné materiál zkoušet v jednoosém tahu, dvouosém tahu a čistém smyku. Výsledkem těchto testů je křivka, která nám udává závislost mezi napětím a deformací pro dané typy zatěžování. [3] [14]



Obrázek č. 10 – Křivky pro různé typy zatěžování elastomeru

## 8.1 Zkouška jednoosé napjatosti

Základním principem této zkoušky je protáhování zkušební vzorku v trhačím stroji v jednom směru a to danou konstantní rychlostí. V průběhu testu se snímají síly a prodloužení, které potřebujeme pro vyhodnocení charakteristiky protahovaného vzorku. Zkouška probíhá do té doby, dokud nedojde k přetržení vzorku. [3] [8]

Pomocí poměrného protažení je definováno prodloužení vzorku. (36)

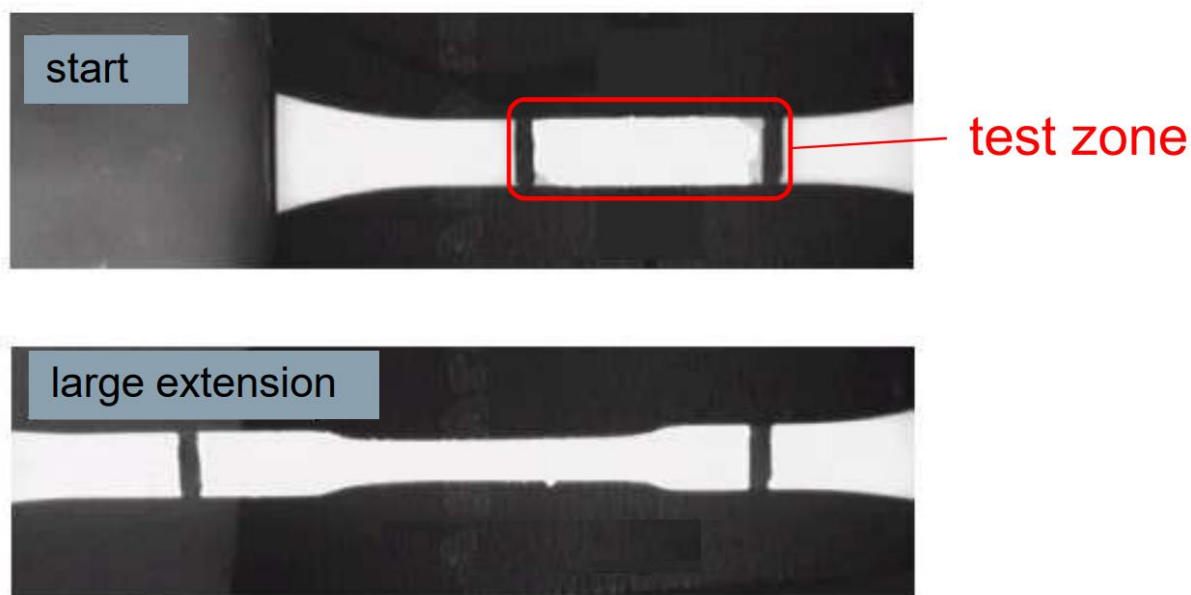
$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2} \quad (36)$$

Definovaná deformace vychází ze stavu nestlačitelnosti, kdy se objem nemění, platí: (37)

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \quad (37)$$

Boční strany vzorku nejsou zatíženy, potom tedy platí  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Zkušební vzorky mají nejčastěji tvar oboustranné lopatky (osmička) nebo tvar prstence (kroužek). [8] [14]



Obrázek č. 11 – Jednoosá zkouška napjatosti <sup>7</sup>

## 8.2 Zkouška dvouosé napjatosti

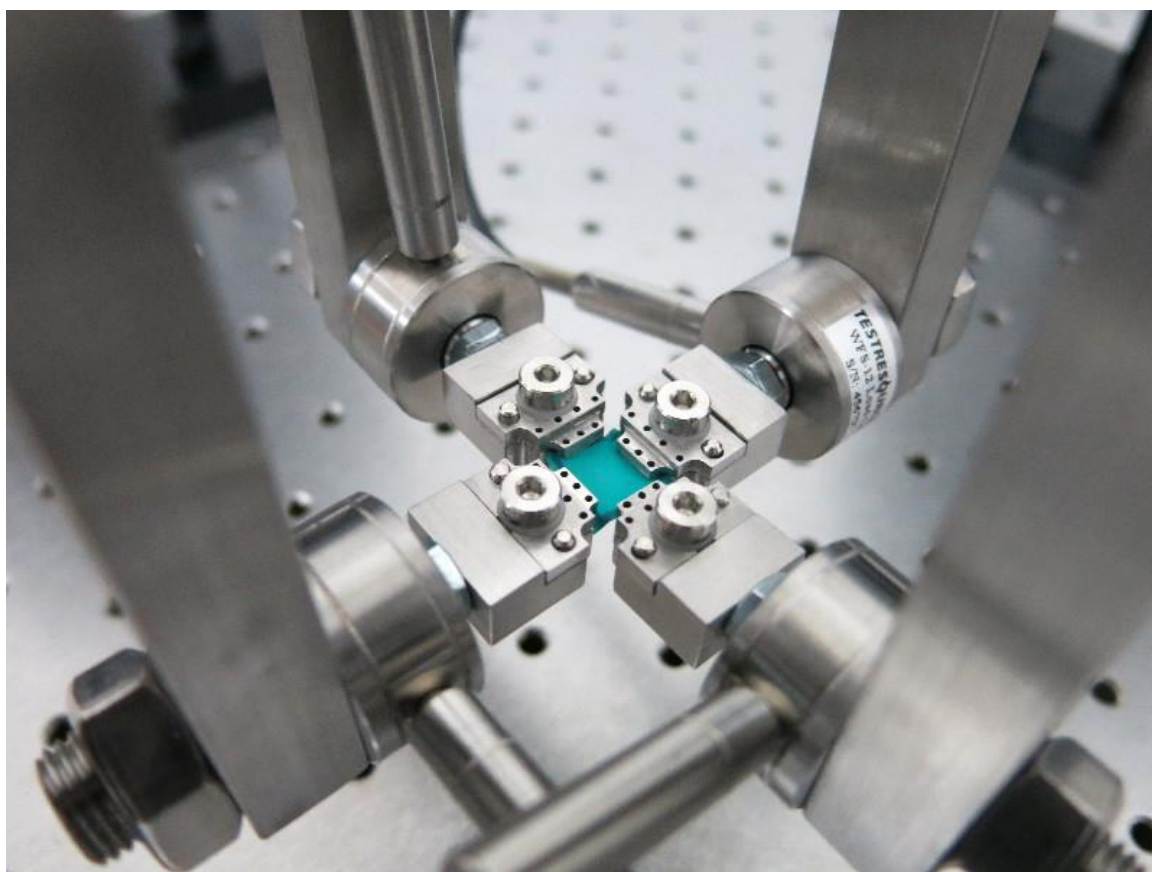
Zkušební vzorek je rovnoměrně upnut do trhačního stroje a je natahován ve dvou navzájem kolmých směrech a zároveň se měří síla a prodloužení zkušební vzorku. Tvar zkušební vzorku bývá zpravidla čtverec nebo kotouč. Další metoda pro dvouosou napjatost je princip nafukování, kdy je těleso díky působícímu tlaku namáháno dvouosým tlakem. Díky jednoosé napjatosti jsme schopni získat vztah pro dvouosý tah. [8] [14]

Poměrná protažení můžeme definovat. (38)

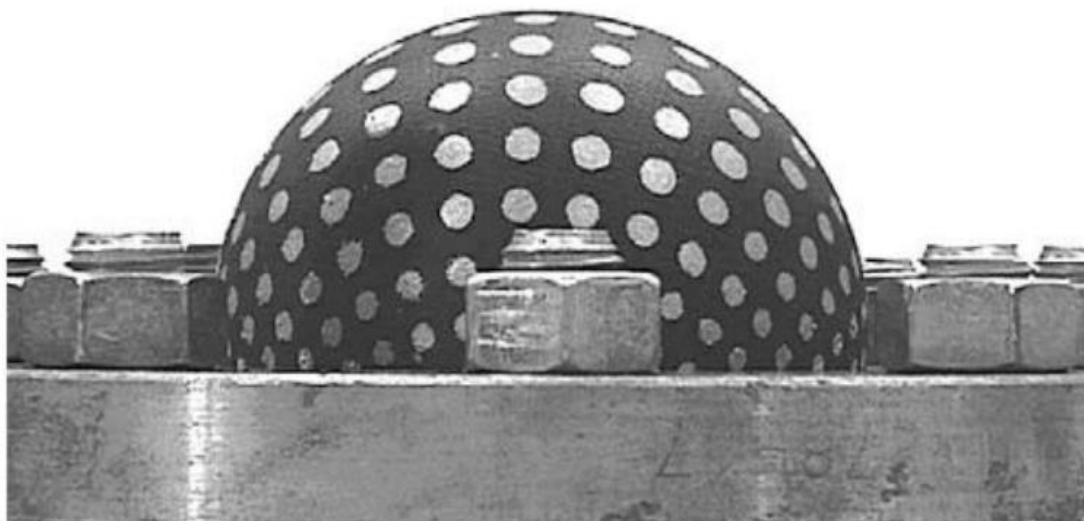
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda; \lambda_3 = 1/\lambda^2 \quad (38)$$

Protože jedna strana vzorku je nezatížena platí,  $\sigma_3 = 0$ . Díky tomu dospějeme k: (39)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad (39)$$



Obrázek č. 12 – Dvouosá zkouška napjatosti <sup>15</sup>



Obrázek č. 13 – Dvouosá zkouška napjatosti nafukováním vzorku <sup>13</sup>

### 8.3 Zkouška tření

Protože se elastomery běžně používají v těsnících aplikacích, hraje tření významnou úlohu a je potřeba znát třecí parametry. Třecí sílu můžeme charakterizovat jako sílu, která odolává



klouzáni dvou povrchů vůči sobě navzájem. [8] [14] Princip je takový, že se zkušební vzorek upne do takzvaných saní s gumovým dnem a probíhá tření o skleněný povrch. Normálovou sílu známe a třecí sílu je potřeba měřit. Mezi tyto dva povrchy, tedy mezi gumu a skleněné dno se aplikují různá maziva, která značně ovlivňují měření třecí síly. [14]

Obrázek č. 14 – Zařízení pro měření třecí síly <sup>5</sup>

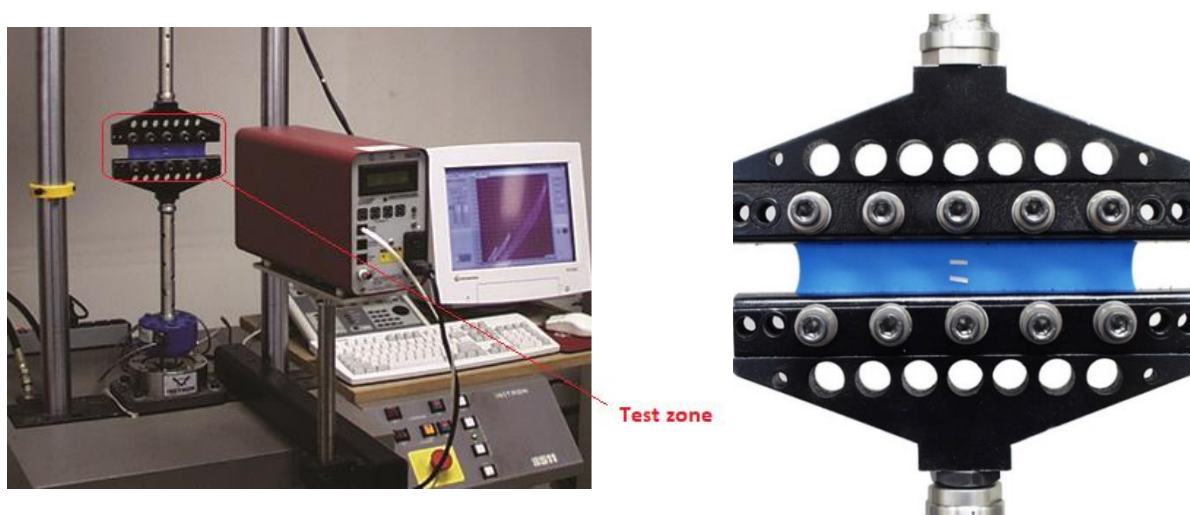
## 8.4 Zkouška rovinným smykem

Zkušební vzorek je obdélníkového tvaru a je rovnoměrně zatěžován v hlavním směru tak, aby nedošlo ke změně šířky vedlejších stran. K tomuto zabránění slouží dlouhé horizontální svorky. Plochý zkušební vzorek je vložen mezi čelisti nebo je mezi ně vlepen. Deformační stav je definován napětím, které aplikujeme ve směru 1 tak, že bráníme změně šířky vzorku ve směru 2, platí tedy  $\lambda_2 = 1$ . [14] Z tohoto vztahu vyplývá název smyk. Během deformace hlavní osy nerotují a proto rovinný smyk. Samotná výška vzorku ve vertikálním směru je mnohonásobně menší, než horizontální šířka v druhém směru. Díky horizontálním svorkám nedochází ke kontrakci vedlejších stran ve zkušebním vzorku a napětí se projevuje pouze ve vertikálním směru.[14]

Definice poměrného prodloužení při přetvoření je (40)

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1 \text{ a } \lambda_3 = \frac{1}{\lambda} \quad (40)$$

Napětí  $\sigma_3 = 0$ . Napětí  $\sigma_2$  se projevuje svorkami, tím pádem se nule nerovná. [14]



Obrázek č. 15 – Zkouška rovinným smykem a kovové čelisti <sup>5</sup>

## 8.5 Objemová zkouška

Zkušební vzorek je vložen do zkušební desky a je namazán silikonovým olejem. Na vzorky ve vertikální pozici působí píst, který vytváří napětí ve vzorku. (41)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = - \left| \frac{P}{A_0} \right| \quad (41)$$

P – tlaková síla pístu,  $A_0$  – plocha pístu

Díky tomu, že jsou zkušební vzorky vloženy do desky, přetvoření probíhá pouze ve vertikálním směru a v horizontálním směru je pohyb zamezen. Informace o objemovém modulu pružnosti K, můžeme také získat měřením relativní plochy u jednoosé a dvouosé tahové zkoušky. Pokud jsme schopni tyto informace získat z jednoosé a dvouosé zkoušky, objemová zkouška se nemusí provádět. U pěnových materiálů, kde je stlačitelnost velmi důležitá, musí být objemový test proveden za pomoci nestlačitelné kapaliny (voda).

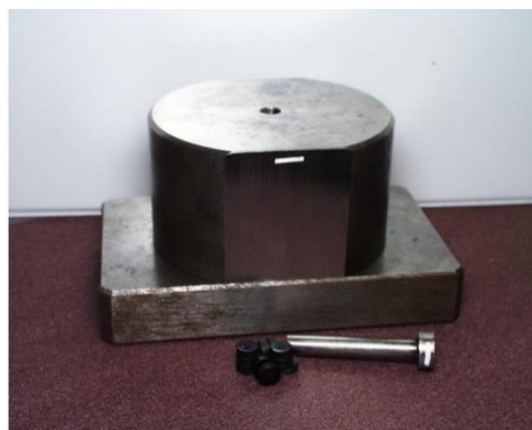
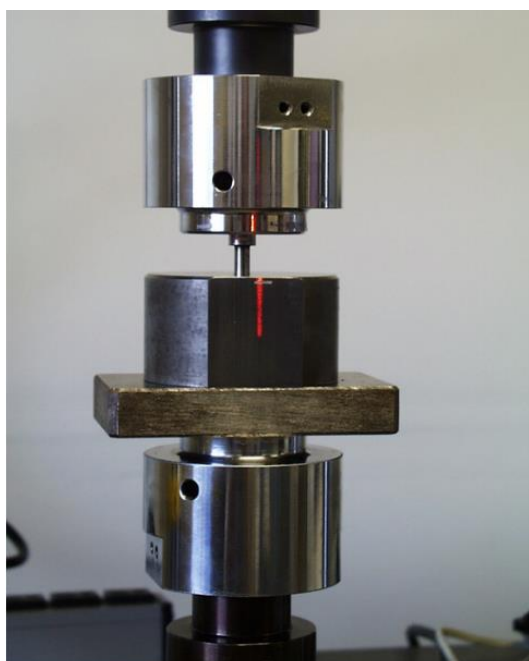
Přetvoření je ve všech směrech stejné, a má tedy tvar. (42 )

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = \left( \frac{V}{V_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (42)$$

Napětí je (43)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \quad (43)$$

P – tlaková síla kapaliny



Obrázek č. 16 – Zařízení pro objemovou zkoušku <sup>14</sup>



## 8.6 Zkouška jednoduché komprese

Největším problémem tohoto testu je, že během testu jsou narušeny laterální linie vlivem tření. Z výsledků analýzy lze vyvodit závěr, že i velmi malá tření významně ovlivňují měření tuhosti. Zkouškou jednoduché komprese jsme také schopni popsat dvouosou napjatost. [7] [14] Přetvoření lze popsat více způsoby. (44, 45) Napětí lze popsat (46).

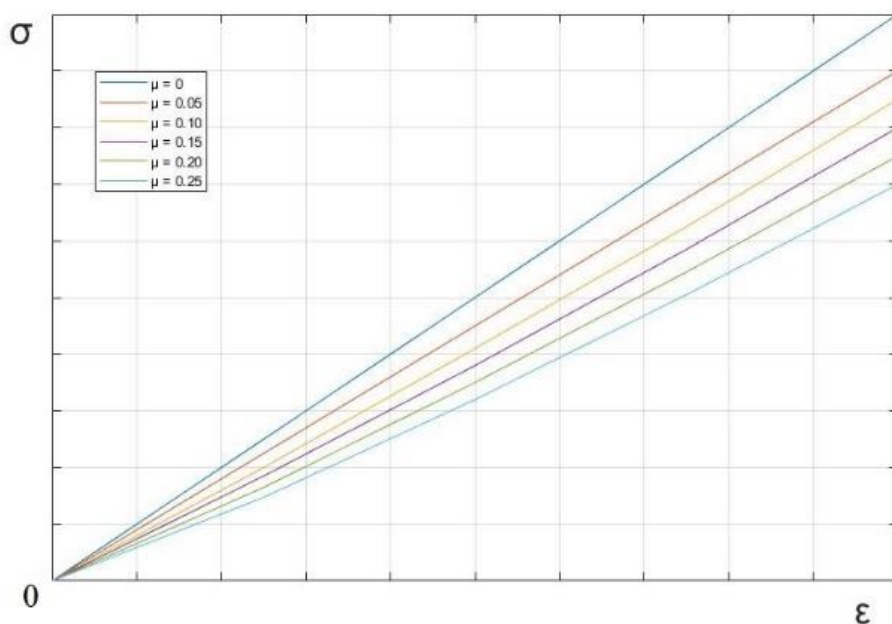


$$\lambda_2 = \lambda = \frac{L}{L_0}; \lambda_1 = \lambda_3 = \sqrt{A/A_0} \quad (44)$$

$$\lambda_3 = \lambda = \frac{L}{L_0}; \lambda_2 = \lambda_1 = \sqrt{A/A_0} \quad (45)$$

$$\sigma_2 = \sigma = \frac{P}{A_0}; \sigma_1 = \sigma_3 = 0 \quad (46)$$

Obrázek č. 17 – Zařízení pro jednoduchou kompresní zkoušku <sup>7</sup>



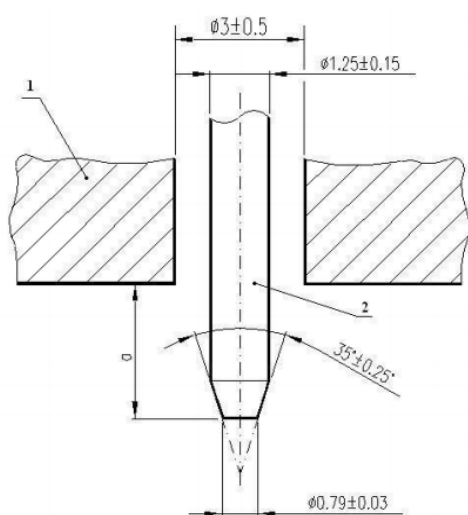
Obrázek č. 18 – Graf znázorňující křivky napětí-deformace při různém koeficientu tření

## 8.7 Metoda Shore

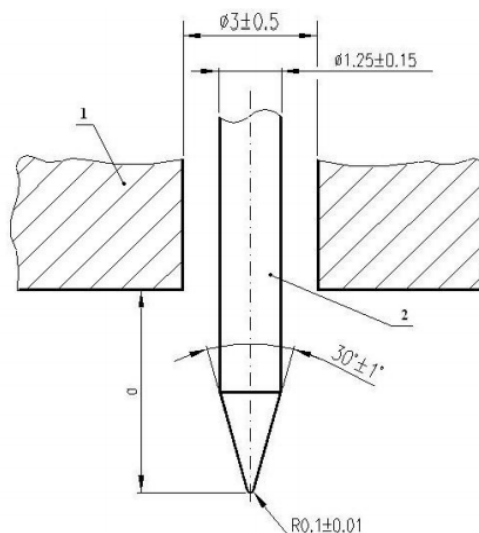
Je to metoda, která slouží pro měření tvrdosti elastických materiálů (nekovových). Tvrdost můžeme chápat jako vzdorování materiálu vůči vnikání jiného, tvrdšího materiálu. Vzorky o tloušťce materiálu větší než 6 mm jsou převážně měřeny podle Shoreho. Pro měření se používá hrot tvrdoměru A, který je vhodný pro měkčí materiály a hrot tvrdoměru D, který je vhodný pro tvrdší materiály. Tato metoda nám umožňuje měřit tvrdost materiálu na začátku vtačování nebo po uplynutí stanovené doby. Princip je takový, že se zkušební vzorek položí na rovný povrch. Tvrdoměr je kolmo přiložen na zkušební vzorek tak, aby špička hrotu byla od všech krajů zkušební vzorku v minimální vzdálenosti 9 mm. Na zkušební vzorek se bez nárazu a co nejrychleji přitlačí opěrná patka, která musí být neustále rovnoběžná s povrchem zkušební vzorku. Tlak hrotu je volen tak, aby došlo ke kontaktu mezi zkušebním vzorkem a opěrnou patkou. Po uplynutí stanovené doby můžeme ze stupnice odepsat tvrdost. Na libovolných místech ve vzdálenosti 6 mm se provede dalších 5 měření a stanovíme aritmetický průměr. [17]

1) Zkušební hrot

2) Opěrná patka



Hrot typu A



Hrot typu D

Obrázek č. 19 – Typy hrotů využívané při Shore zkoušce <sup>17</sup>



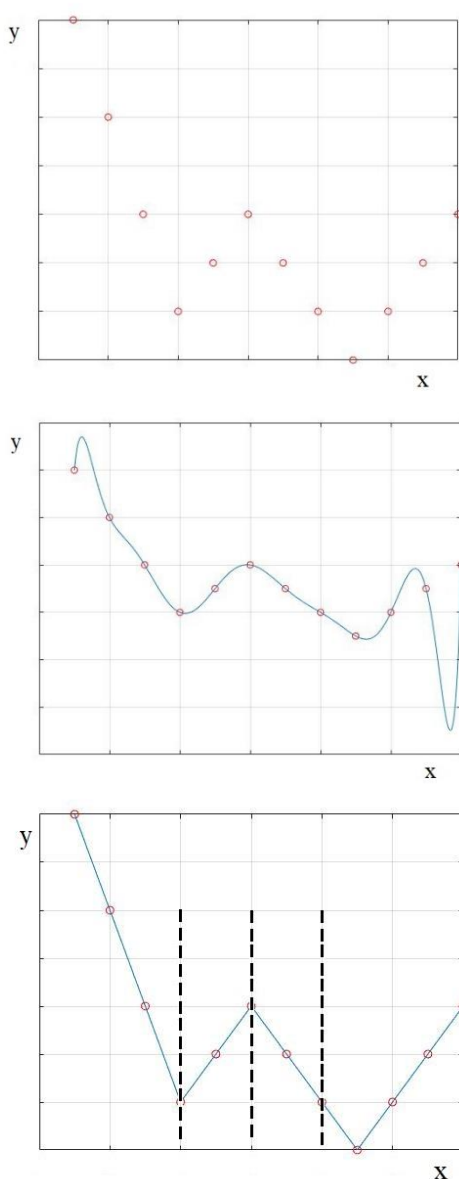
## **II. Výpočtová část**

## CÍL VÝPOČTOVÉ ČÁSTI

Ve výpočtové části se budeme zabývat součinitelem koncentrace napětí v závislosti na přetvoření. Tuto závislost budeme analyzovat pro různé modely, u kterých budou vymodelovány koncentrátory napětí jako jsou zápichy, osazení a příčné díry. Celkem budeme analyzovat 6 modelů, kde každý z nich má jinou geometrii a má jiný koncentrátor napětí. Pro každý model bude provedena kontrola konvergence sítě a výpočet zrealizujeme konečno prvkovou metodou, kterou si představíme a odvodíme si hlavní rovnici MKP.

## 9 Úvod do MKP

Jelikož pro výpočtovou část využijeme metodu konečných prvků, je dobré si říct její princip. MKP definujeme jako numerickou metodu, která slouží pro simulaci průběhu napětí, deformací, vlastních frekvencí, proudění tepla a dalších. Základní myšlenkou je rozložení tělesa na menší části neboli elementy. Díky rozložení je analýza chování mnohem lehčí. Nejrozšířenější je deformační varianta, kde se posuvy nahrazují náhradními funkcemi. Pro aproximaci posuvů využíváme polynomických funkcí vysokých řádů, nebo to můžeme provést elegantněji, kdy měřený interval rozdělíme na více částí a v každé z nich použijeme aproximaci lineární funkcí (přímka nebo parabola). [6]



Dále se můžeme setkat s variantou silovou (Castigliánův variační princip), kde neznámé jsou silové veličiny. Celý postup MKP můžeme vyjádřit následovně.

- 1) Řešenou oblast rozdělíme (diskretizujeme) na podoblasti. Tedy na konečný počet elementů
- 2) Musíme formulovat chování jednotlivých elementů.
- 3) Provedeme opětovné složení a získáme výslednou soustavu rovnic popisujících chování systému za použití rovnic získaných při analýze elementů.
- 4) Aplikujeme počáteční podmínky.
- 5) Vyřešíme soustavu rovnic, čímž získáme primární neznámé. V deformační variantě se jedná o posuvy.
- 6) Obdržení dodatečných výsledků. Pokud se jedná o pružné těleso dodatečné výsledky jsou napětí a deformace.

Obrázek č. 20 – Pole posuvů, polynomická funkce a lineární funkce <sup>16</sup>

## 9.1 Odvození hlavní rovnice MKP

Její odvození může být provedeno více způsoby. Pro naše odvození použijeme princip virtuálních prací. Můžeme se také setkat s metodou vážených reziduí a principem potencionálního minima energie, který je omezen pouze na elastické materiály. [6]

Pokud se naše těleso nachází v rovnovážné poloze, pak práce vnitřních a vnějších sil na virtuálních posuvech našeho tělesa si jsou rovny. Nekonečně malé posuvy neboli virtuální posuvy, které splňují okrajové podmínky. [6] [8]

$$\int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} \cdot dV = \int_V \sigma_{in} \cdot \delta u_i \cdot dV + \int_S p_i \cdot \delta u_i \cdot dS \quad (47)$$

$\sigma_{ij}$  – Cauchyho tenzor napětí,  $\varepsilon_{ij}$  – Green-Lagrange tenzor přetvoření,  $\sigma_i$  – vektor vnitřních napětí tělesa,  $u_i$  – vektor deformačních posuvů,  $p_i$  – vektor vnějšího zatížení,  $V$  – objem deformovaného tělesa,  $S$  – plocha deformovaného tělesa

$$\{U\} = [N] \cdot \{\Theta\} \quad (48)$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\Theta\} \quad (49)$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\Theta\} \quad (50)$$

$N$  – matice posuvů,  $B$  – matice přetvoření,  $D$  – matice materiálových konstant,  $\Theta$  – vektor deformačních parametrů

### Virtuální práce

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} \cdot dV \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \delta \{\Theta\}^T \cdot \left( \int [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot \{\Theta\} - \int [N]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV - \int [N]^T \cdot \{p\} \cdot dS \right) \\ = 0 \delta W = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} \cdot dV \end{aligned} \quad (52)$$

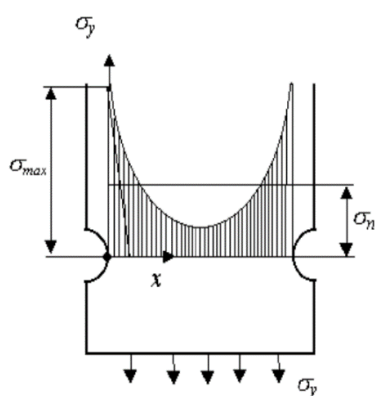
Po úpravách dostaneme hlavní rovnici MKP (53)

$$[K] \cdot \{\Theta\} = \{F_t\} \quad (53)$$

$K$  – matice tuhosti,  $\Theta$  – vektor deformačních parametrů,  $F_t$  – vektor působících zatížení

## 10 Součinitel koncentrace napětí

Jelikož se budeme zabývat závislostí součinitele koncentrace napětí na přetvoření, je dobré si říci, co to vlastně ten součinitel je. Osazení (vruby) zvyšují místně napětí, které můžeme vyjádřit poměrným zvýšením napětí ve srovnání s nominálním napětím, které při působení u tělesa stejného typu a pod stejným namáháním bez osazení. Zmíněné zvýšení vyjadřujeme bezrozměrným součinitelem koncentrace napětí  $\alpha$  (v anglosaské literatuře označen jako  $K_t$ ). [18]



Součinitel koncentrace napětí je závislý na:

- 1) Poloměru zakřivení vrubu
- 2) Hloubce vrubu a rozměru tělesa v hlavním řezu
- 3) Typu namáhání

Nejčastěji je koncentrace napětí největší při tahovém namáhání, nižší při ohybovém a nejmenší se projevuje při namáhání krutem. [18]

Obrázek č. 21 – Rozložení napětí <sup>18</sup>

Součinitel koncentrace napětí  $K_t$  je definován: (54)

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (54)$$

$\sigma_{max}$  – největší napětí v místě koncentrace,  $\sigma_{nom}$  – nominální napětí

Pokud je součást s vrubem namáhána kombinovaným zatížením, je nutné pracovat s redukováným součinitelem koncentrace napětí. (55) (56)

$$\sigma_{red} = \frac{(\sigma_{max})_{red}}{\sigma_{nom}} \quad (55)$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} = \sigma_1 \cdot \nu \quad (56)$$

$\nu$  – součinitel napjatosti,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - hlavní napětí. Součinitel koncentrace napětí  $K_t$  je vždy větší jak 1 a zároveň je nezávislý na velikosti součásti a na materiálu.

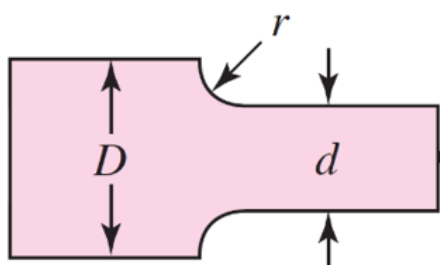
## 11 Výpočetní modely

Pro analýzu součinitele koncentrace napětí v závislosti na přetvoření bylo vymodelováno 6 modelů, kde 3 modely jsou obdélníkové geometrie a 3 modely jsou kruhové. Všechny modely budou analyzované pro jednoosou napjatost. Pro vymodelování modelů byl použit program SpaceCalm, který je součástí Ansysu. Pro všechny modely byl zvolen jednotný materiál Yeoh 1.řádu, a to z důvodu porovnávání výsledků. Modely mají symetrickou geometrii a je vhodné je počítat jako čtvrtiny nebo osminy pro dosažení co nejmenšího počtu elementů. Díky tomu, že jsou modely symetrické byly použity okrajové podmínky symetrie (Displacement). Pro vysíťování výpočetních modelů byl použit element SOLID186. Je to pevný prvek, který vykazuje kvadratické chování při posuvech. Prvek je definován 20 uzly, které mají tři stupně volnosti na uzel. Dále podporuje plasticitu, hyperelasticitu, tečení a velké deformace (větší jak 1 %). Také se vyznačuje schopností pro simulaci deformací téměř nestlačitelných elastoplastických a plně nestlačitelných hyperelastických materiálů. [4]

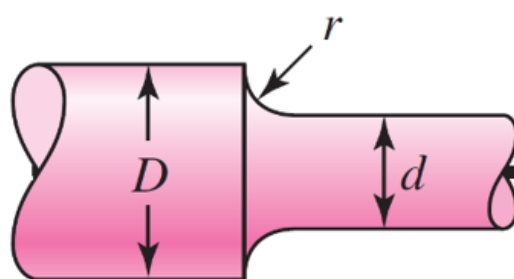
Pro jednotlivé modely byla provedena konvergence sítě pro dosažení správnosti výsledků. Konvergence je vždy provedena pro nejmenší a největší poloměr nebo průměr osazení, zápichu a příčné díry. Protože jsou modely simulované ve studentské verzi Ansys, konvergence sítě je do určité míry omezena. Modely budou označeny AA, AB, AC, BA, BB, BC. U modelů, kde je možné provést analýzu pro více poměrů  $D/d$ , budou označeny AA1, AA2 a AA3. V poslední části analýzy bude provedeno porovnání zpevňujícího a změkčujícího materiálu pro libovolně zvolený model. Tento model bude označen CA.

## 11.1 Jednotlivé modely

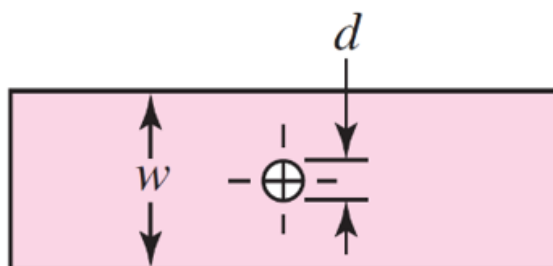
MODEL AA



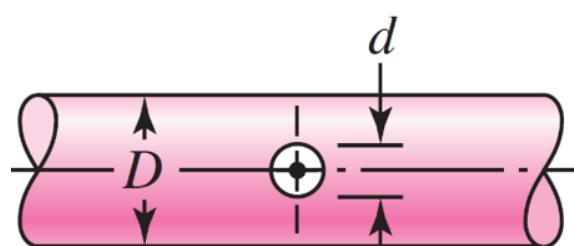
MODEL BA



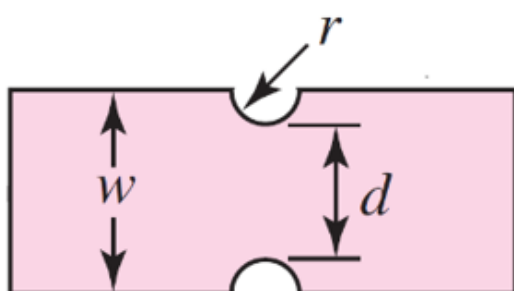
MODEL AB



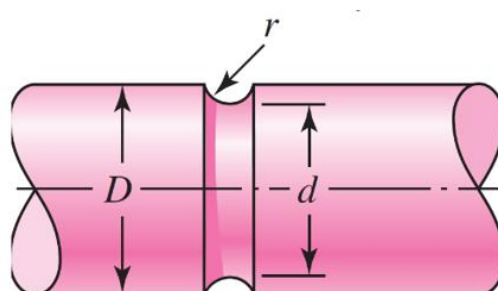
MODEL BB



MODEL AC



MODEL BC



Obrázek č. 22 – Označení jednotlivých modelů

## 12 PREZENTACE VÝSLEDKŮ

### 12.1 Porovnání analytického výpočtu s výpočtem numerickým

Porovnejme si analytický výpočet s výpočtem numerickým. Tento výpočet bude proveden pro materiál Yeoh prvního řádu. Konstanta materiálu bude pro obě metody stejná, tedy  $C_{10} = 10$ . Zatížení bude odpovídat jednoosé napjatosti. Pro každou metodu bude uveden příklad výpočtu a následné porovnání. Rozměry výpočetního modelu jsou známy, ale nejsou podstatné. Jediný důležitý parametr, který nás zajímá, je o kolik bude model protahován. V našem případě bude model protahován od 0-200 %. Model nebude obsahovat žádné koncentrátoři napětí.

#### Analytický výpočet

Materiál Yeoh prvního řádu je definován následovně. (57)

$$W = C_{10} \cdot (I_1 - 3) \quad (57)$$

První invariant je definován následovně (58)

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (58)$$

Napětí pro Yeoh pro jednoosou napjatost je definováno následovně (59)

$$\sigma = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad (59)$$

Parciální derivace měrné deformační energie podle prvního invariantu vypadá následovně (60)

$$\begin{aligned} W &= C_{10} \cdot (I_1 - 3) \\ W &= C_{10} I_1 - 3 C_{10} \\ W &= C_{10} \end{aligned} \quad (60)$$



Dostáváme finální vzorec pro výpočet napětí (61)

$$\sigma = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) C_{10} \quad (61)$$

Kde  $C_{10}$  – je naše zvolená materiálová konstanta,  $\lambda$  – jsou naše hodnoty protažení

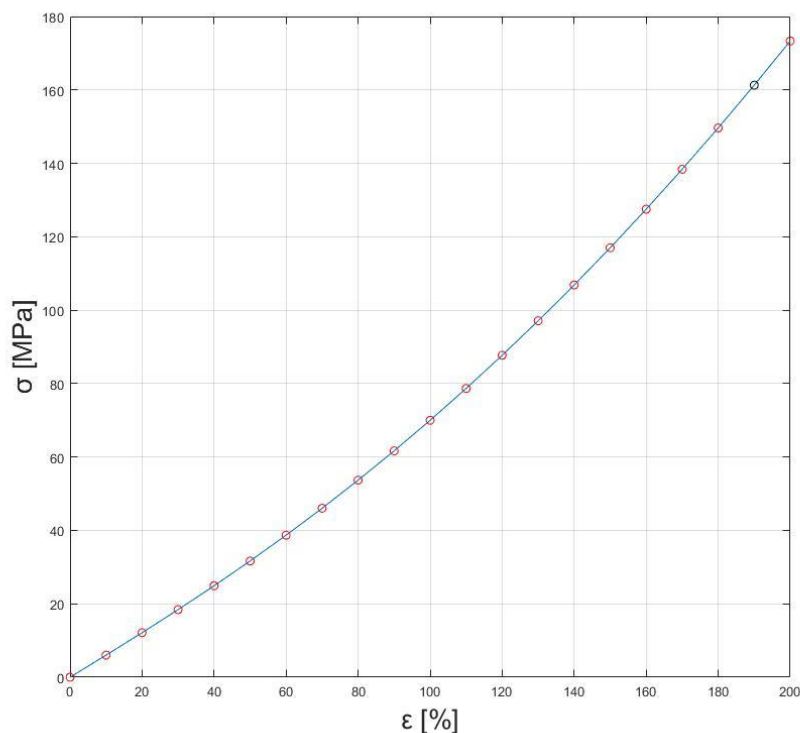
### Příklad výpočtu

Vypočet provedeme pro hodnotu protažení 190 %, kde je nutné k této hodnotě přičíst počáteční stav, tedy 100 %. Hodnota, s kterou budeme počítat je tedy 290 %.

$$\sigma = 2 \left( 2.9^2 - \frac{1}{2.9} \right) 10 \quad (62)$$

$$\sigma = 161,30 \text{ MPa} \quad (63)$$

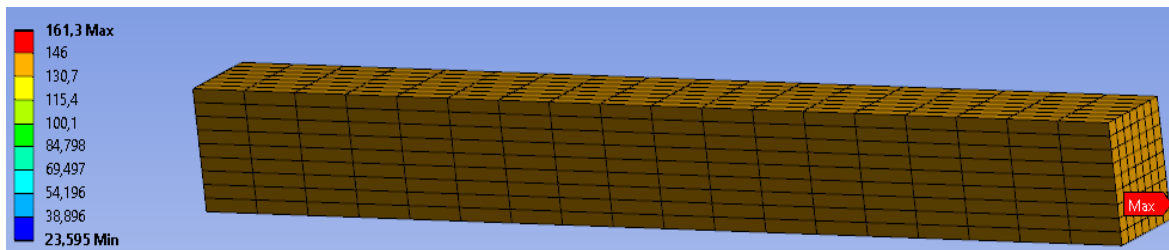
Výsledek je předposlední hodnota křivky a je vyobrazena v grafu.



Obrázek č. 23 – Graf znázorňující křivku napětí-deformace pro analytický výpočet

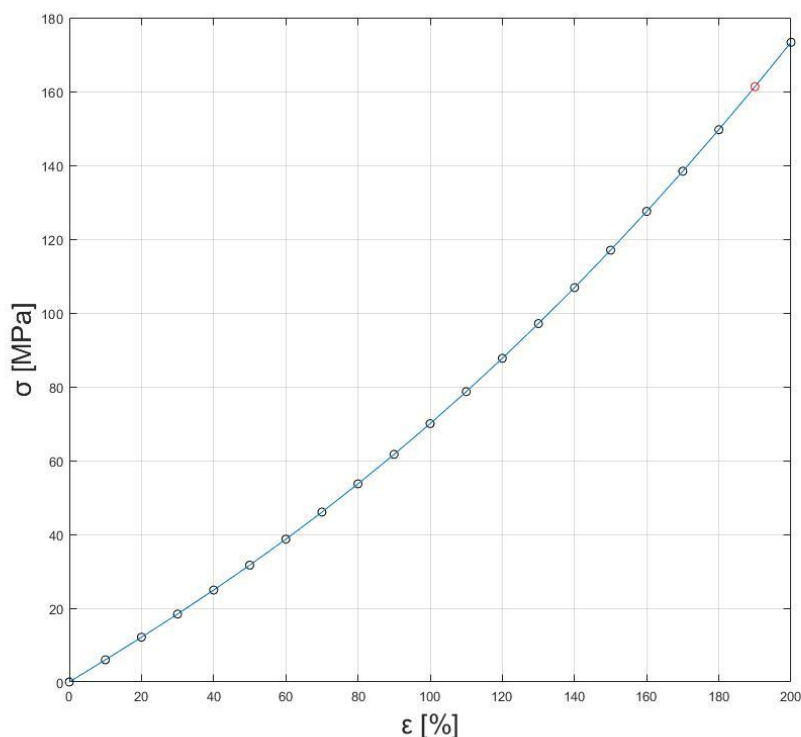
## Numerický výpočet

V programu Ansys jsem vymodeloval jednoduchý obdélníkový model. Pro tento model jsem provedl výpočet pro stejnou hodnotu protažení, tedy 190 %.



Obrázek č. 24 – Maximální normálové napětí při numerickém výpočtu

Jak můžeme vidět z obrázku č. 24, vypočtené napětí je 161,3 MPa. Je tedy shodné s napětím, které jsme vypočítali pomocí analytické metody. Vypočtená hodnota je obdobně jako u analytické metody předposlední hodnota a je vyobrazena v grafu.



Obrázek č. 25 – Graf znázorňující křivku napětí-deformace pro numerický výpočet

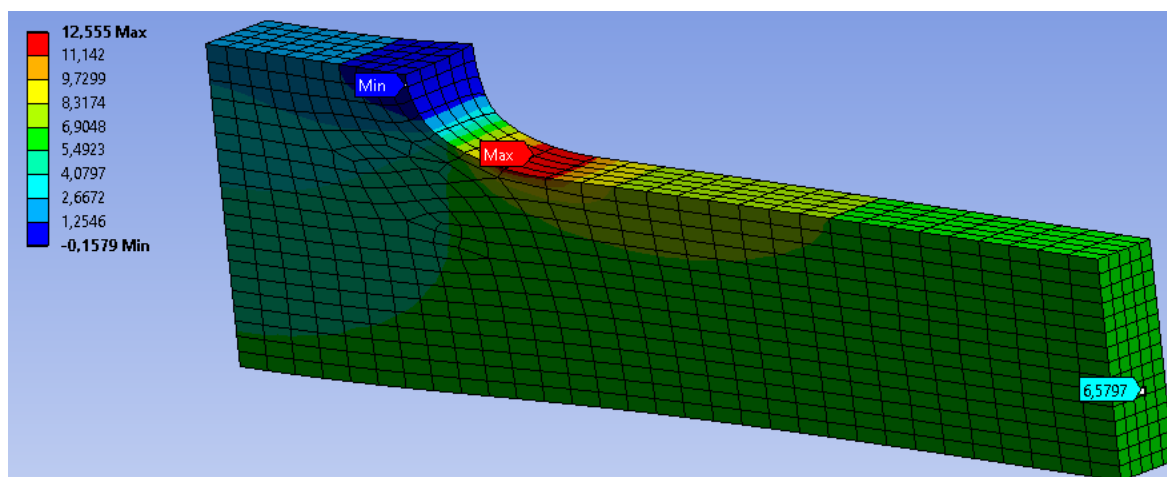
Analytická metoda je pracnější, ale je stejně přesná jako metoda numerická. Z obrázku č. 23 a 25 lze vidět, že křivky napětí-deformace jsou totožné.

## 13 MODEL AA

Koncentrátorem napětí pro tento model je osazení. Pro MODEL AA byla provedena analýza pro tři různé poměry D/d. U každého modelu se měnil poloměr osazení r od 0,1 – 2.5 mm. Konvergence sítě byla provedena pro všechny tři poměry, z toho vždy pro nejmenší a největší poloměr osazení. Délka modelu je 30 mm a je natahován o 60 mm

### 13.1 MODEL AA – POMĚR AA1

Poměr AA1 = 1.3



Obrázek č. 26 – Normálové napětí MODELU AA – Poměr AA1

Součinitel koncentrace napětí vypočteme jako maximální hodnotu normálového napětí podělenou normálovým napětím na konci protahovaného modelu. Výpočet bude vypadat následovně. (64)

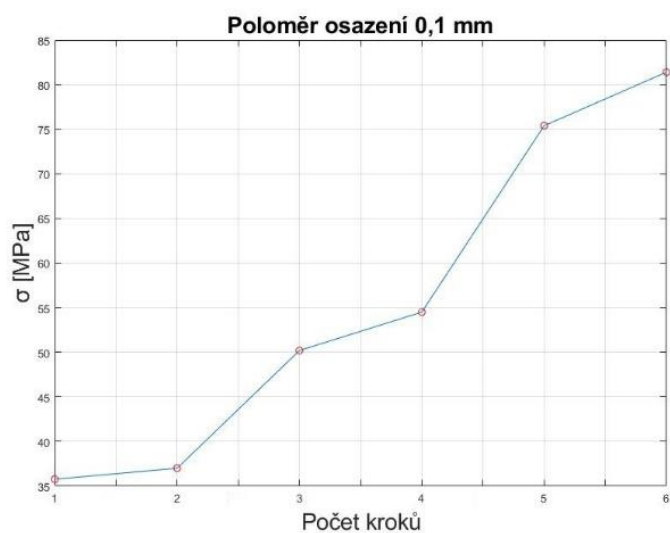
$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (64)$$

Obdobně můžeme vypočítat součinitel koncentrace napětí pro všechny MODEL Y.

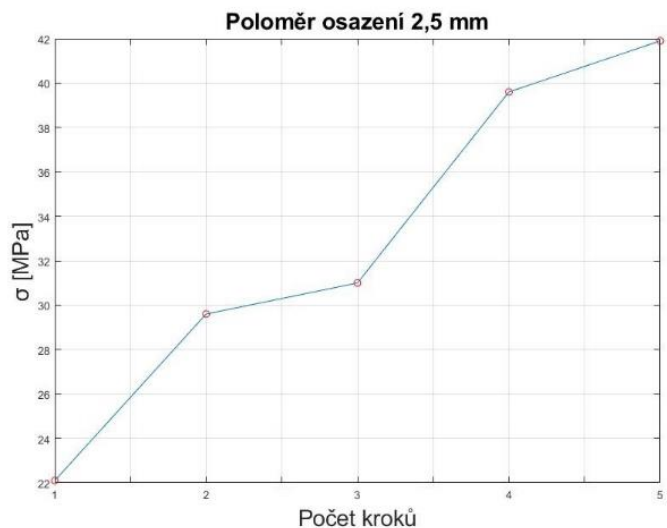
## 13.2 Konvergence sítě

Konvergencí sítě rozumíme přibližování výsledku výpočtu metody konečných prvků k řešení spojitého problému při zhušťování sítě konečných prvků. Provedení konvergence sítě je nutné pro dosažení dostatečně přesných výsledků. Konvergence sítě byla provedena pro všechny modely, ale níže bude znázorněna pouze pro MODEL AA – poměr AA1.

Konvergence sítě pro MODEL AA – poměr AA1



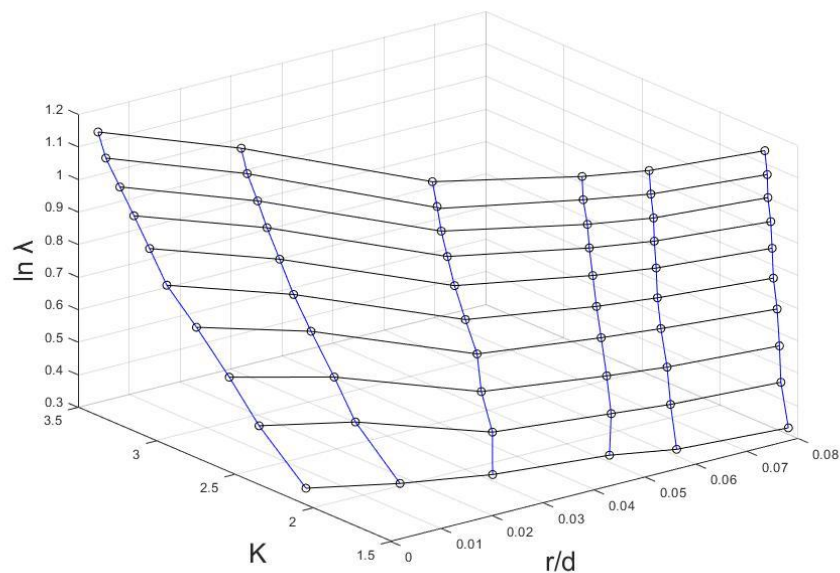
Obrázek č. 27 – Konvergence sítě pro poloměr osazení 0,1 mm



Obrázek č. 28 – Konvergence sítě pro poloměr osazení 2,5 mm

Pokud zmenšíme element a výsledek se nezmění o více jak 5 %, můžeme prohlásit, že výpočet je nezávislý na síti. Rozdíl výsledků pro poloměr osazení 0,1 mm je 7,3 % a pro 2,5

mm je 5,48 %. Jak již bylo zmíněno v kapitole 11 z důvodu studentské verze Ansys je konvergence sítě omezena, a proto nebyla splněna.

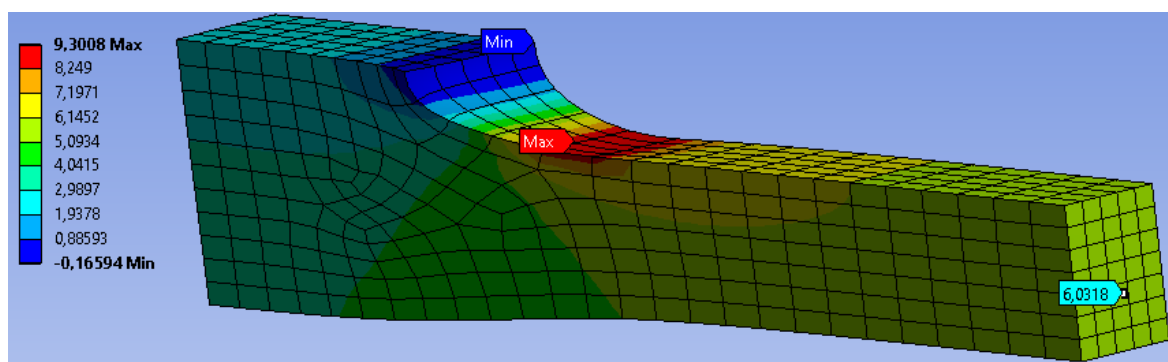


Obrázek č. 29 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro poměr AA1

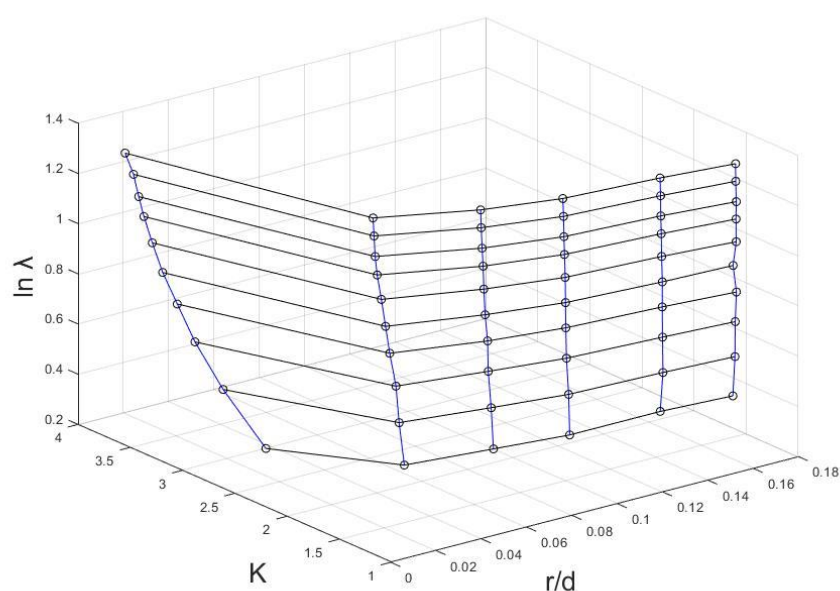
Z grafu lze vidět, že při zvyšování přetvoření nám součinitel koncentrace napětí roste. Pro nejmenší poloměr osazení (0,1 mm) nabývá součinitel koncentrace napětí nejvyšších hodnot. Se zvyšováním poloměru osazení nám součinitel koncentrace napětí klesá. Pokud bychom poloměr osazení zvyšovali, součinitel koncentrace napětí by se téměř stabilizoval.

### 13.3 MODEL AA – POMĚR AA2

Poměr AA2 = 1.5



Obrázek č. 30 – Normálové napětí MODELU AA – Poměr AA2

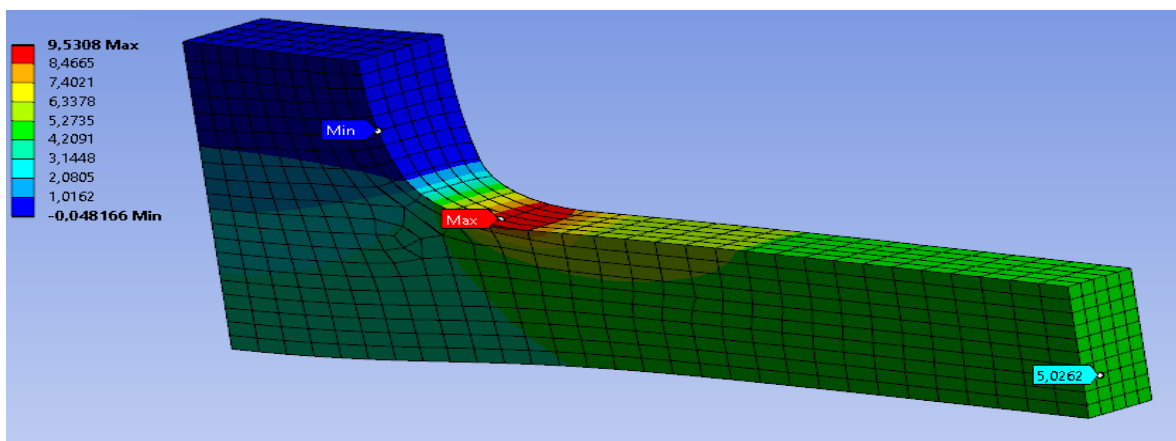


Obrázek č. 31 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro poměr AA2

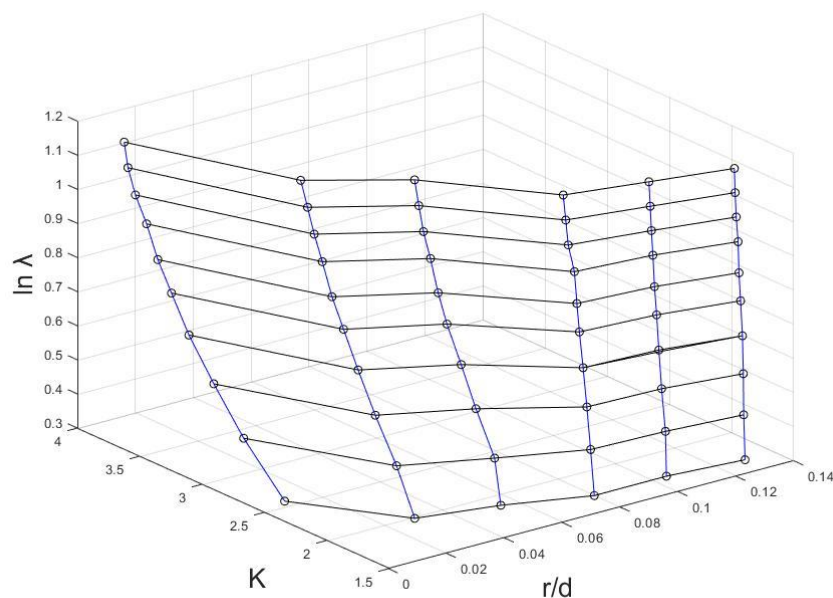
Z grafu lze opět vidět, že při zvyšování přetvoření nám součinitel koncentrace napětí roste a nejvyšších hodnot dosahuje při poloměru osazení 0,1 mm. Rozdíl oproti poměru AA1 můžeme sledovat v konečné fázi protažení, kde součinitel koncentrace napětí pro poměr AA1 klesal ale pro poměr AA2 se téměř stabilizoval.

### 13.4 MODEL AA – POMĚR AA3

Poměr AA3 = 2



Obrázek č. 32 – Normálové napětí MODELU AA – Poměr AA3

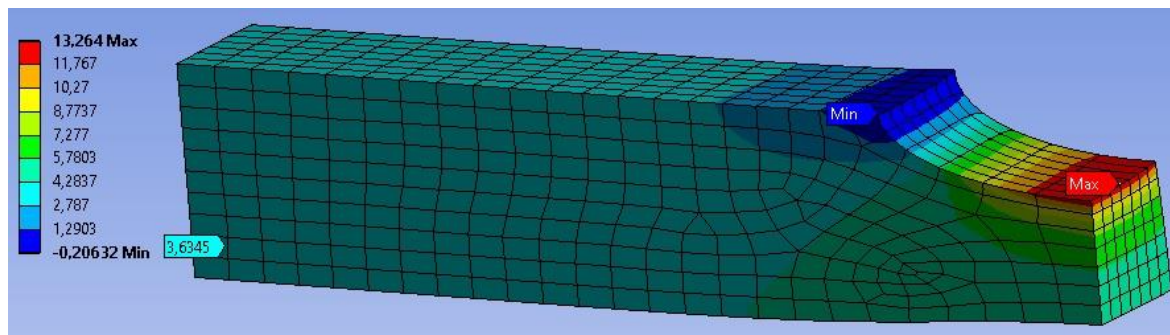


Obrázek č. 33 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro poměr AA3

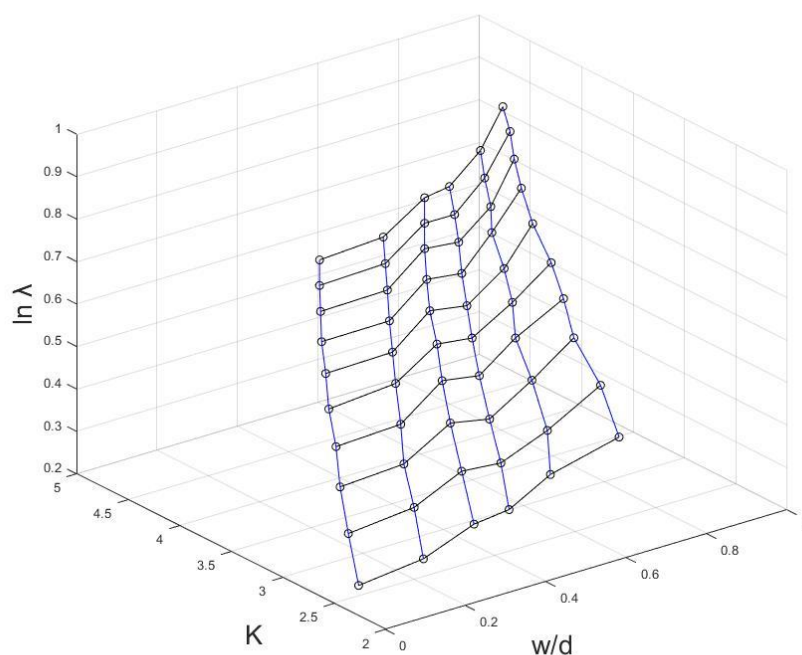
Pokud porovnáme grafy pro všechny poměry modelu AA, zjistíme, že vliv geometrie není příliš zásadní a největší vliv na závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření má poloměr osazení. Čím ostřejší přechod mezi geometriemi, tím vyšší napětí vzniká v oblasti osazení. Při zvyšování poloměru napětí klesá a dochází ke stabilizaci součinitele koncentrace napětí.

## 13.5 MODEL AB

Koncentrátorem napětí pro tento model je příčná díra. Model AB je závislý pouze na dvou parametrech, a to na výšce vzorku  $W$  a průměru příčné díry  $d$  (viz 9.1). Protože se změnou průměru mění poměr  $W/d$ , bude sestaven pouze jeden 3D graf, který bude obsahovat 6 různých geometrií. Při analýze modelu s příčnou dírou byl měněn pouze průměr díry, a to od 5 mm do 14 mm. Vzorek je dlouhý 70 mm a je natahován o 60 mm.



Obrázek č. 34 – Normálové napětí MODELU AB



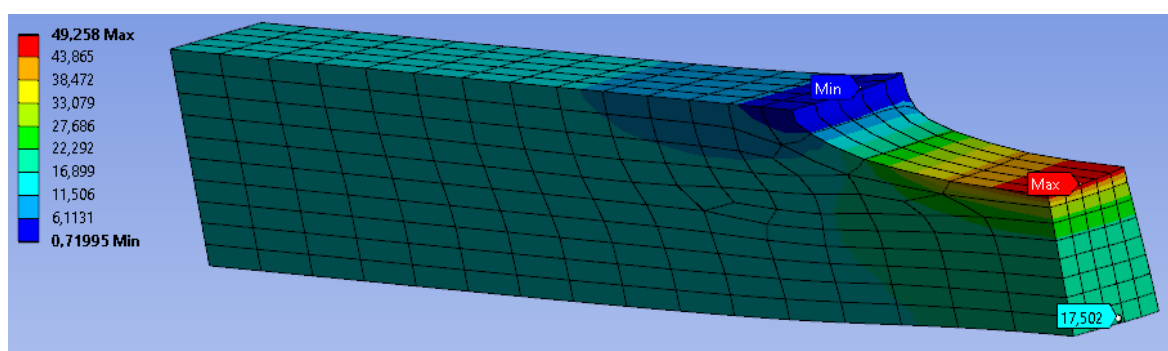
Obrázek č. 35 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL AB

Z grafu lze vidět, že při zvyšování průměru příčné díry nám součinitel koncentrace napětí roste. Nejvyšších hodnot součinitel koncentrace napětí dosahuje při konečné fázi přetvoření.

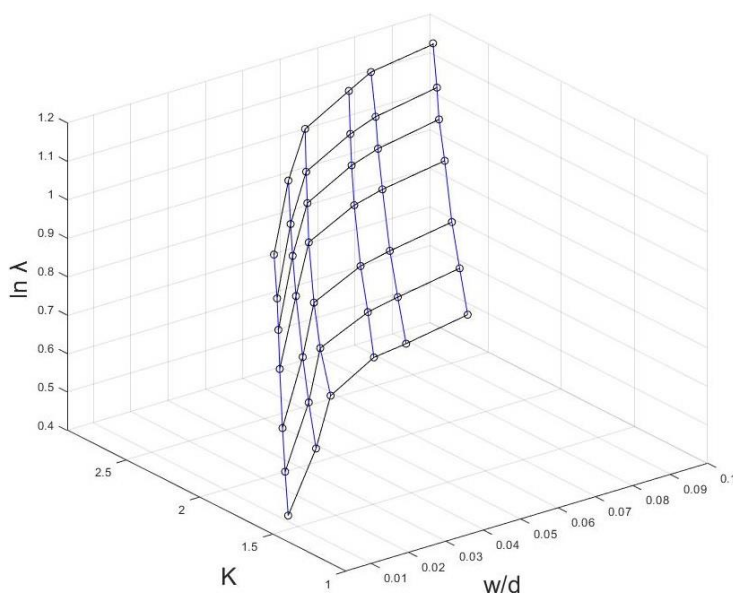


## 13.6 MODEL AC

Koncentrátorem napětí pro tento model je zápich. Hlavními parametry pro tento model je výška  $W$ , vzdálenost mezi zápichy  $d$  a poloměr zápichu  $r$ . Protože se změnou poloměru zápichu se mění i vzdálenost  $d$ , bude pro tento model sestrojen jeden 3D graf, který bude obdobně jako MODEL AB obsahovat 6 různých geometrií. Při analýze modelu se zápichem byl měněn pouze průměr zápichu a to od 0,2 mm do 2,5 mm. Vzorek je dlouhý 40 mm a je natahován o 60 mm. Pro MODEL AC je důležité zmínit, že normálové napětí se nebere z konce protahovaného modelu, jak to bylo u předešlých modelů, ale pod samotným zápichem, a to co nejdále od něj. Je to z toho důvodu, že průřez součásti je na konci větší než průřez v části, kde se nachází zápich.



Obrázek č. 36 – Normálové napětí MODELU AC



Obrázek č. 37 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL AC

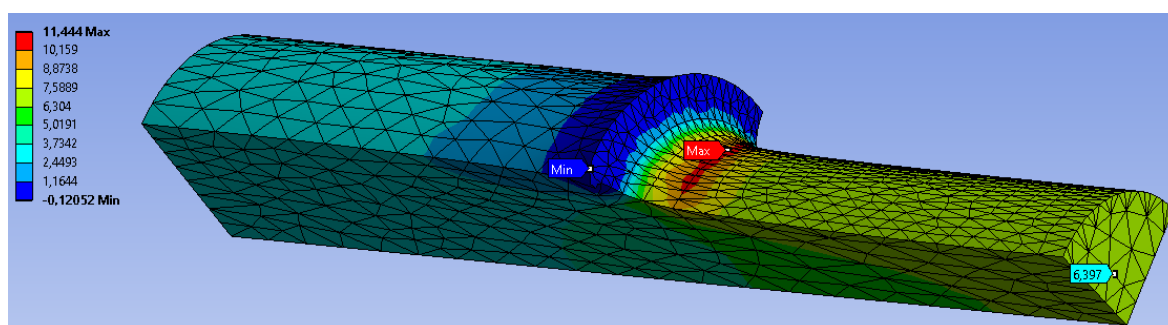
Z grafu můžeme vidět, že při zvyšování poloměru zápichu dochází ke zvýšení součinitele koncentrace napětí a v konečné fázi přetvoření nabývá nejvyšších hodnot

### 13.7 MODEL BA

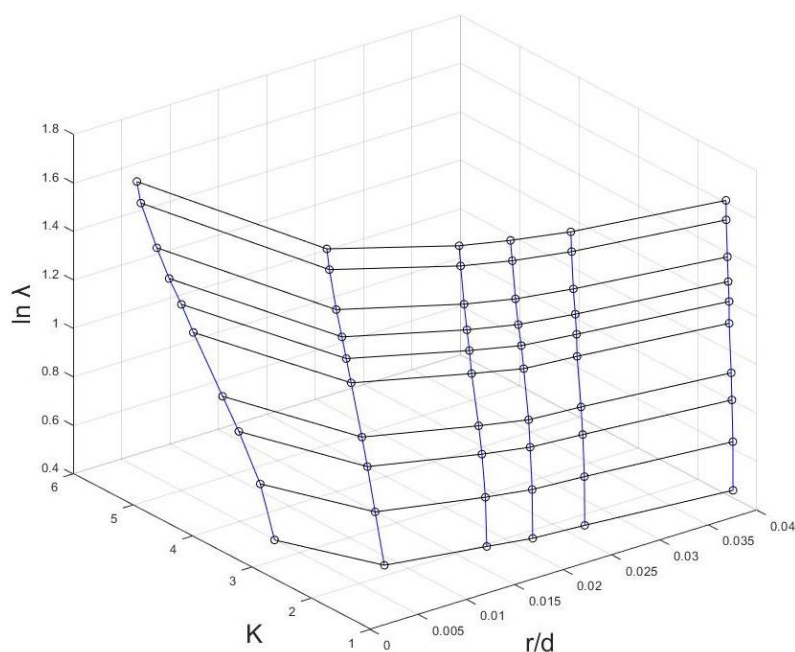
Koncentrátorem napětí pro tento model je osazení. Protože změna poloměru osazení není přímo závislá na průměrech  $D$  a  $d$ , je pro tento model sestrojena sada tří 3D grafů. U každého modelu se měnil poloměr osazení  $r$  od 0,1 mm do 1 mm. Konvergence sítě byla provedena pro všechny tři poměry, z toho vždy pro nejmenší a největší poloměr osazení. Délka modelu je 30 mm a je natahován o 60 mm.

### 13.8 MODEL BA – POMĚR AA1

Poměr AA2 = 1,3



Obrázek č. 38 – Normálové napětí MODELU BA – poměr AA1

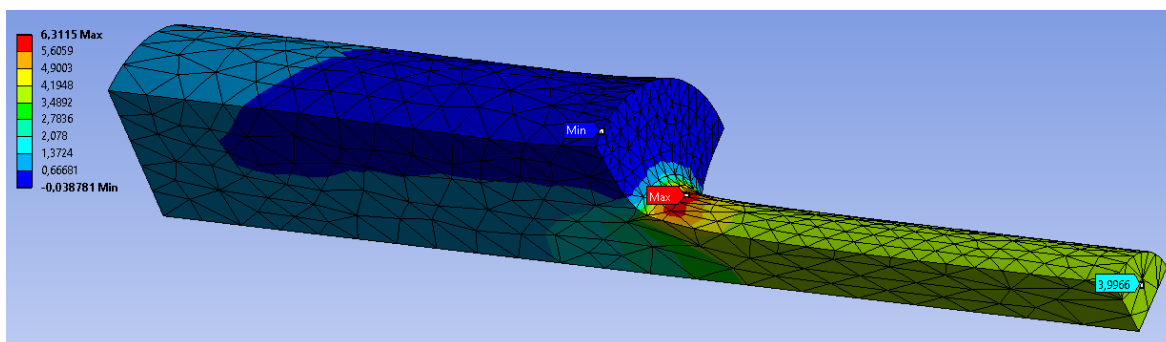


Obrázek č. 39 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL BA – poměr AA1

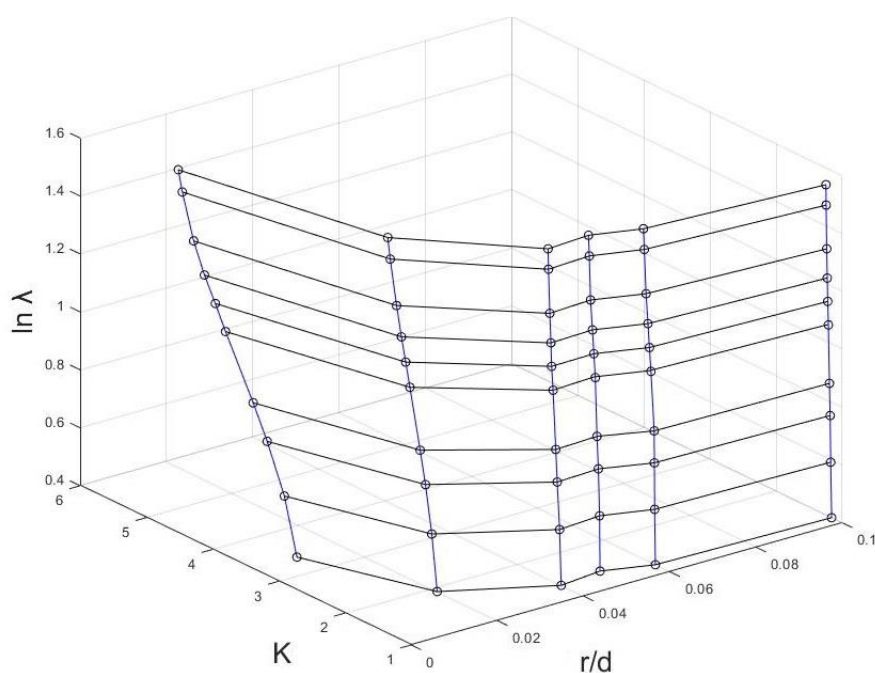
Obdobně jako u MODELU AA se zvyšováním poloměru osazení dochází ke snížení součinitele koncentrace napětí. Nejvyšších hodnot dosahuje součinitel koncentrace napětí při nejmenším poloměru osazení.

## 13.9 MODEL BA – POMĚR AA2

Poměr AA2 = 2



Obrázek č. 40 – Normálové napětí MODELU BA – poměr AA2

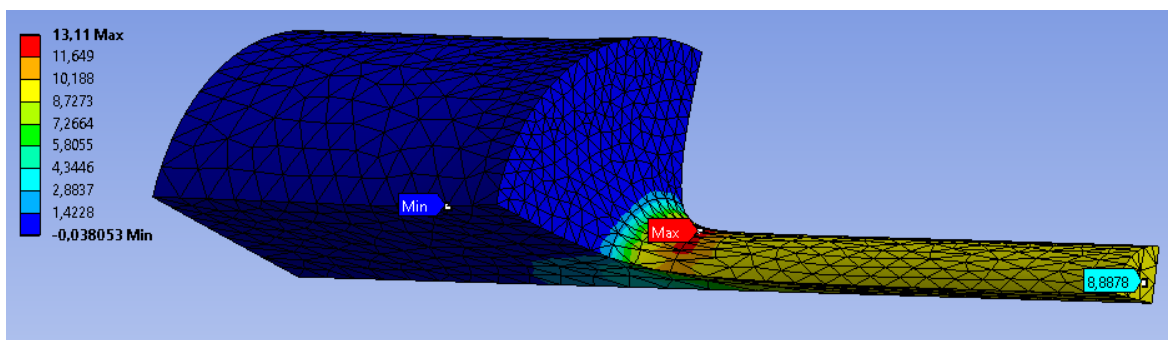


Obrázek č. 41 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL BA – poměr AA2

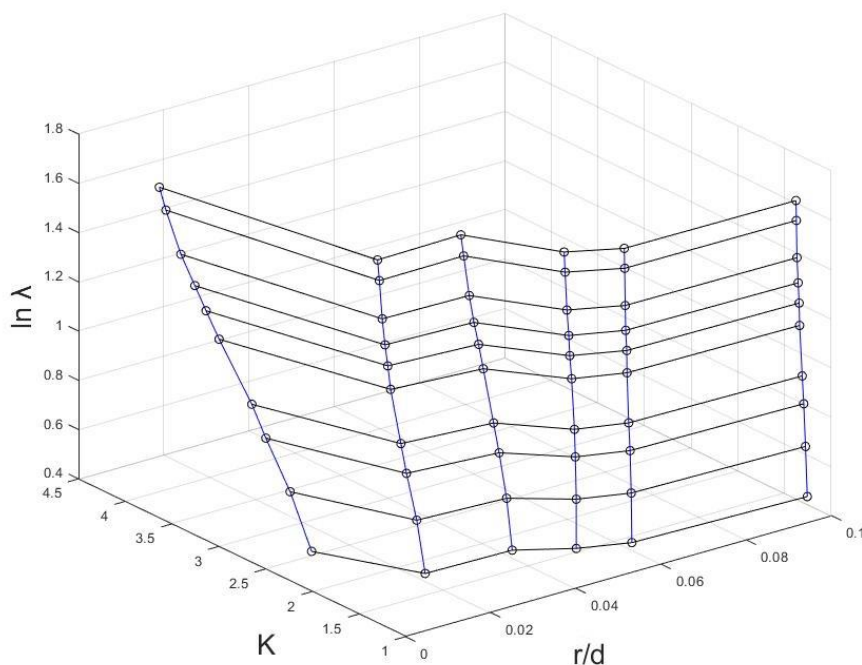
Z grafu vidíme, že geometrie zásadně nemění závislosti součinitele koncentrace napětí na přetvoření. Se zvyšováním poloměru osazení nám součinitel koncentrace napětí klesá.

### 13.10 MODEL BA – POMĚR AA3

Poměr AA3 = 3



Obrázek č. 42 – Normálové napětí MODELU BA – poměr AA3

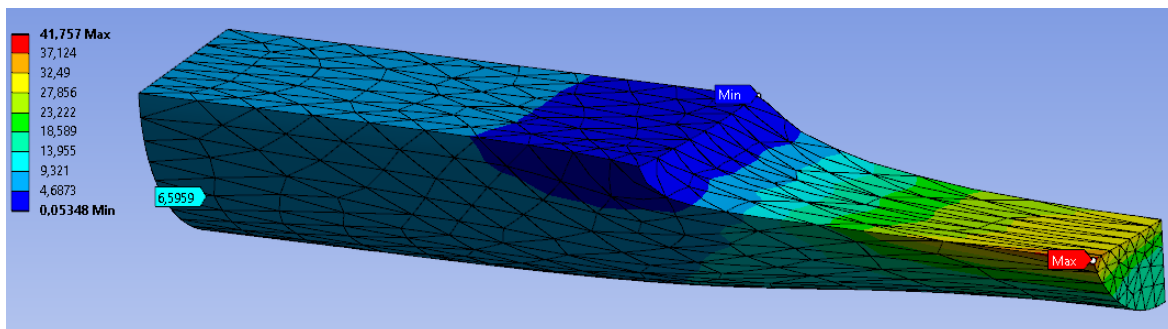


Obrázek č. 43 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL BA – poměr AA3

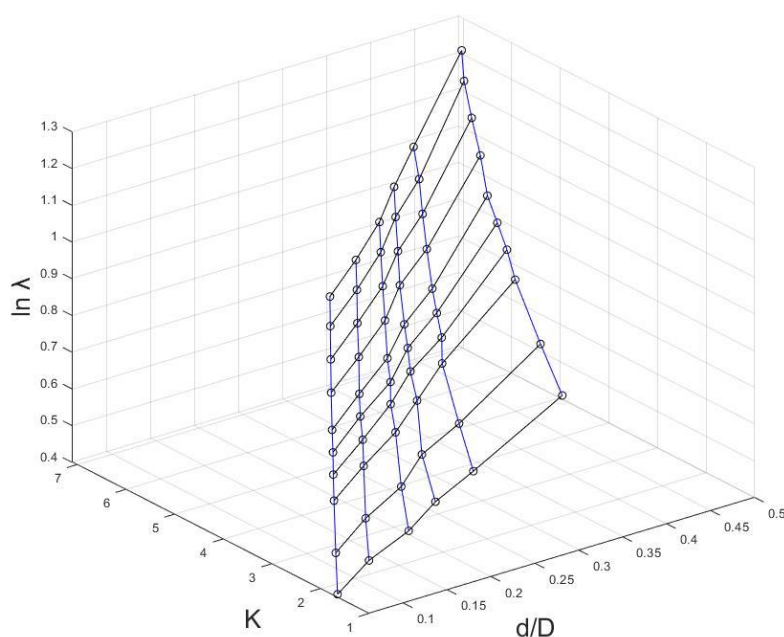
Z grafu lze vidět, že se změnou geometrie se hodnoty součinitele koncentrace napětí radikálně nemění. Pro všechny poměry MODELU BA platí, že při zvyšování poloměru osazení součinitel koncentrace napětí klesá a nejvyšších hodnot dosahuje při konečné fázi přetvoření.

### 13.11 MODEL BB

Koncentrátorem pro tento model je příčná díra. Model BB je závislý pouze na dvou parametrech, a to na průměru modelu  $D$  a průměru příčné díry  $d$  (viz 9.1). Protože se se změnou průměru příčné díry mění poměr  $d/D$ , bude sestaven pouze jeden 3D graf, který bude obsahovat 6 různých geometrií. Při analýze modelu s příčnou dírou byl měněn pouze průměr díry, a to od 1 mm do 6 mm. Vzorek je dlouhý 70 mm a je natahován o 60 mm.



Obrázek č. 44 – Normálové napětí MODELU BB

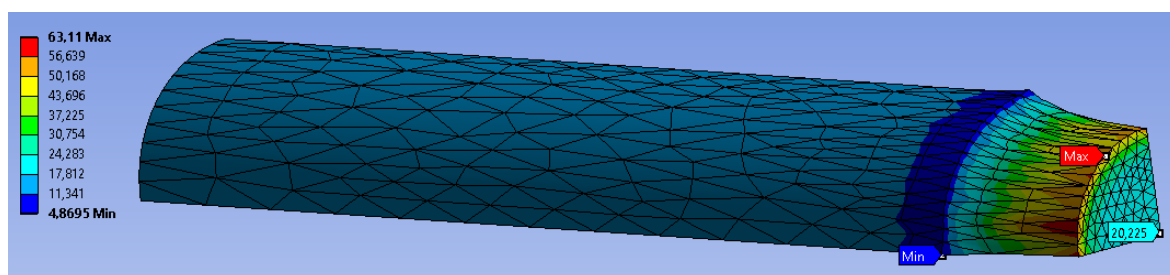


Obrázek č. 45 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL BB

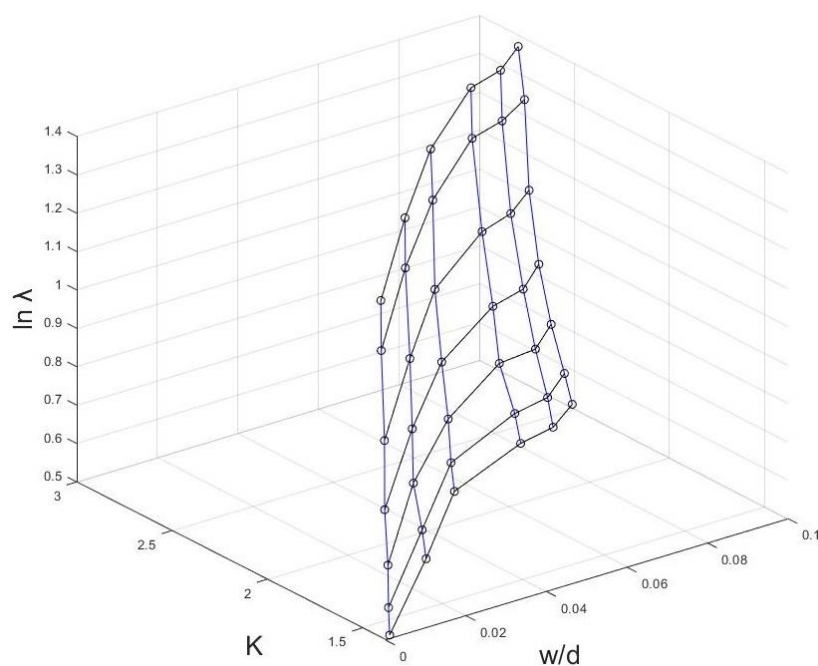
Z grafu lze usoudit, že se zvyšováním průměru příční díry součinitel koncentrace napětí roste a nejvyšších hodnot dosahuje v konečné fázi přetvoření. Je to opačný jev oproti MODELU AB a BA, kde se zvyšováním poloměru osazení se součinitel koncentrace napětí snižoval.

### 13.12 MODEL BC

Koncentrátorem pro tento model je zápich. Hlavními parametry pro tento model je průměr  $D$ , vzdálenost mezi zápichy  $d$  a poloměr zápichu  $r$  (Viz 9.1). Protože, se změnou poloměru zápichu se mění i vzdálenost  $d$ , bude pro tento model sestrojen jeden 3D graf, který bude obdobně jako MODEL BB obsahovat 6 různých geometrií. Při analýze modelu se zápichem byl měněn pouze průměr zápichu a to od 0,2 mm do 1,2 mm. Délka modelu je 50 mm a je natahován o 60 mm. Obdobně jak pro MODEL AC je důležité zmínit, že normálové napětí se nebere z konce protahovaného modelu, jak to bylo u předešlých modelů, ale pod samotným zápichem, a to co nejdále od něj.



Obrázek č. 46 – Normálové napětí MODELU BC

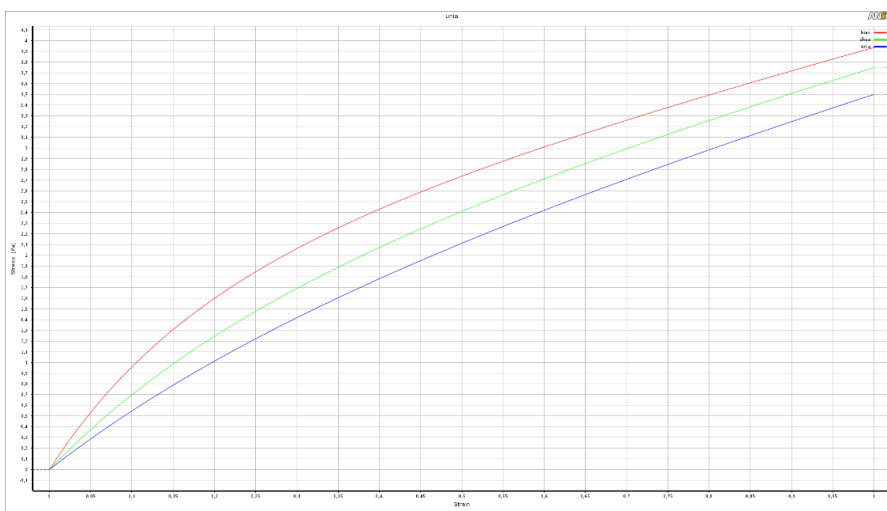


Obrázek č. 47 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL BC

Z grafu lze vidět, že se zvyšováním poloměru zápichu dochází ke zvyšování součinitele koncentrace napětí a nejvyšších hodnot dosahuje v konečné fázi přetvoření.

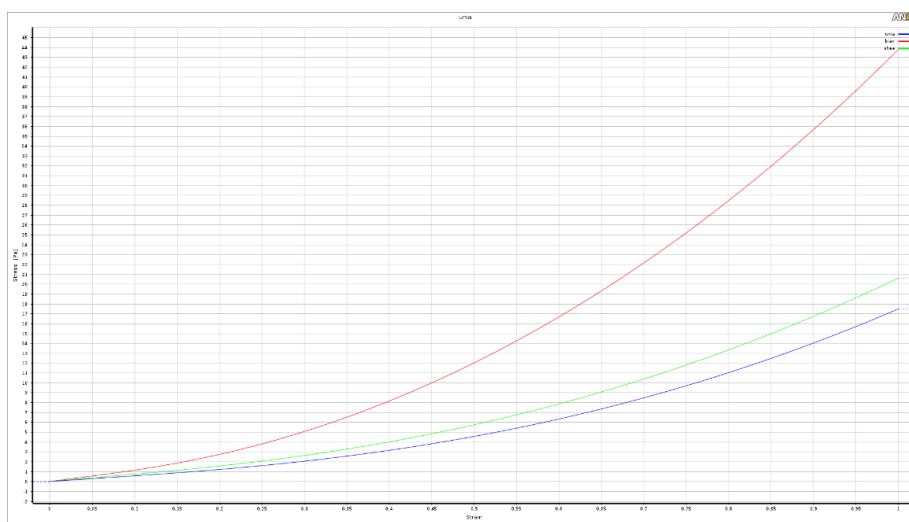
### 13.13 MODEL CA-vliv materiálu

Pro všechny výpočetní modely byl zvolen jednotný materiál, a to Yeoh prvního řádu. Provedl jsem analýzu, kde jsem sledoval, jak se součinitel koncentrace napětí chová v závislosti na přetvoření. Pokud přidáme další konstantu, dostaneme materiál Yeoh druhého řádu a jeho chování bude jiné. Tento materiál jsem použil na vybraný model a sledoval jsem jeho chování vůči prvotnímu materiálu Yeoh prvního řádu. Zvolený MODEL AA – poměr AA3.



Obrázek č. 48 – Křivka napětí-deformace pro Yeoh prvního řádu <sup>4</sup>

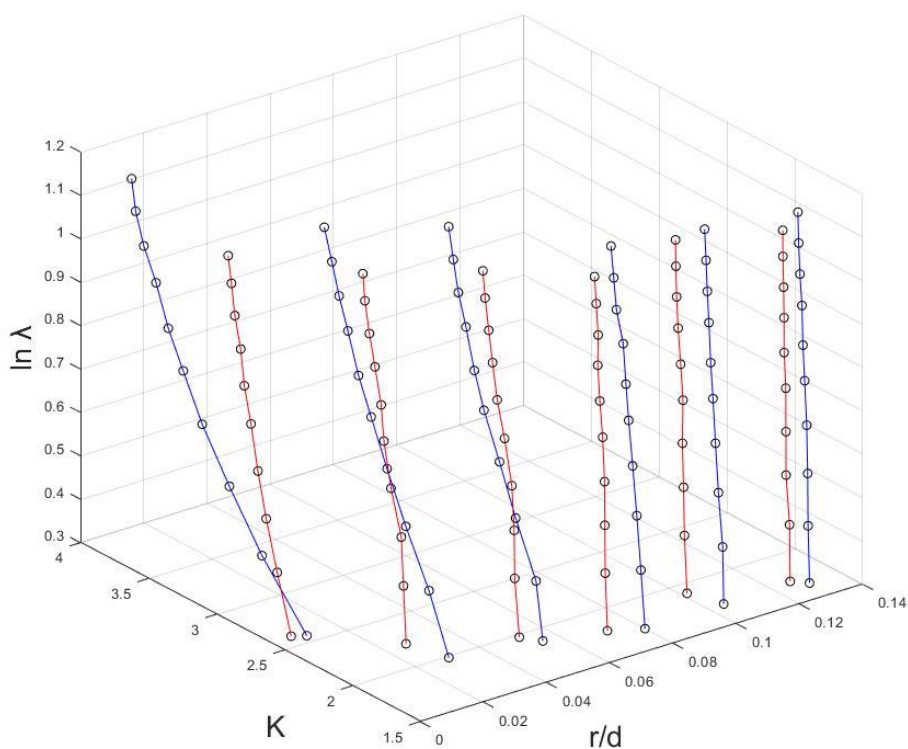
Z křivky pro napětí-deformace pro materiál Yeoh prvního řádu lze vidět, že se zvyšujícím přetvořením dochází k postupnému zvyšování napětí. Tento materiál lze považovat za změkčující.



Obrázek č. 49 – Křivka napětí-deformace pro Yeoh druhého řádu <sup>4</sup>



Z křivky napětí-deformace pro materiál Yeoh druhého řádu lze vidět, že v počáteční fázi přetvoření se napětí drží nižších hodnot a se zvyšujícím přetvořením dochází k prudkému nárůstu napětí. Tento materiál lze považovat za zpevňující.



Obrázek č. 50 – Graf znázorňující závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro MODEL AA (poměr AA3) v porovnání s MODEL AC

Modré křivky v grafu nám znázorňují závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro materiál Yeoh prvního řádu. Červené křivky v grafu nám znázorňují závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro materiál Yeoh druhého řádu. Z výsledku patrného z grafu můžeme usoudit, že materiál má vliv na závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření.



## 14 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo představení hyperelastických materiálu, jejich rozdělení do konstitutivních modelů, výroba a oblast jejich využití. Výpočetní část byla zaměřena na analýzu součinitele koncentrace napětí na přetvoření pro zvolené výpočetní modely. Pro výpočet a vytvoření modelů byl použit program Ansys. Ve zmíněném programu byly nadefinované materiálové vlastnosti, příslušné zatížení a okrajové podmínky. Před zahájením simulací jsem provedl porovnání analytické a numerické výpočetní metody. Jejím výsledkem byla shoda obou metod i přesto, že analytická metoda je mnohem náročnější. Z výpočtových simulací je patrné, že změna geometrie zásadně neovlivňuje závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření. Výsledky pro MODEL AA a BA, kde koncentrátorem napětí je osazení, nám naznačují, že největší vliv na součinitel koncentrace napětí v závislosti na přetvoření má poloměr osazení. Při nízkých hodnotách poloměru osazení nabýval součinitel koncentrace napětí nejvyšších hodnot a při zvyšování poloměru osazení součinitel koncentrace napětí klesal. Modely AB a BB, kde koncentrátorem napětí byla příčná díra docházelo k opačnému jevu než u modelů s osazením. Se zvyšujícím průměrem příčné díry dochází ke snížení součinitele koncentrace napětí a při snížení průměru k nárůstu. Chování modelů AC a BC, kde koncentrátorem napětí je zápich je totožné s modely AA a BA. Při zvýšení poloměru zápichu opětovně dochází k nárůstu součinitele koncentrace napětí a při snížení poloměru k jeho poklesu. Poslední model s označením CA, sloužil pro porovnání chování různých materiálu za stejných podmínek. Z výsledku lze vidět, že závislost součinitele koncentrace napětí na přetvoření není totožná a materiál tuto závislost ovlivňuje.

## 15 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] LENERT, Jiří. Pružnost a pevnost I. 3. vyd. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2009. ISBN 978-80-248-2111-5.
- [2] UMTMB – Nelineární úlohy mechaniky v MKP. UMTMB – Úvod [online]. Copyright © 2019 UMTMB [cit. 12.05.2019]. Dostupné z: [http://www.umd-old.fme.vutbr.cz/index.php?option=com\\_content&task=view&id=46](http://www.umd-old.fme.vutbr.cz/index.php?option=com_content&task=view&id=46)
- [3] Ing. Jakub Javořík, Ph.D., Hyperelasticita, učební text
- [4] Ansys help
- [5] Nonlinear finite element analysis of elastomers. 2000. MSC.Software. [online] Dostupné z: <http://www.mssoftware.com/> [May 20, 2019]
- [6] FUSEK, Martin a Radim HALAMA. MKP a MHP – interaktivní studijní materiál [online] Dostupné: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mkpamhp\\_obr.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mkpamhp_obr.pdf)
- [7] Dr.-Ing. Roland Jakel, PTC Presentation for the 2<sup>nd</sup> Analysis of Hyperelastic Materials with MECHANICA [online] Dostupné z:   
[http://qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/5995/data/Analysis\\_of\\_Hyperelastic\\_Materials\\_with\\_MECHANICA.pdf](http://qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/5995/data/Analysis_of_Hyperelastic_Materials_with_MECHANICA.pdf)
- [8] [online] Dostupné z Wikipedie: <http://cs.wikipedia.org>
- [9] Woodford, Chris. (2008/2018) Rubber. [online] Dostupné z: <https://www.explainthatstuff.com/rubber.html>.
- [10] Plastics – Design Technology. Design Technology – Home [online]. Dostupné z: <http://designkmg.weebly.com/plastics.html>
- [11] REICHL, Jaroslav; MARTIN, Všeticka. Encyklopedie fyziky [online]. 2006, 2011 Hookův zákon pro pružnou deformaci. [online] Dostupné z WWW: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/631-hookuv-zakon-pro-pruznou-deformaci>
- [12] MALÁČ, Jiří. Gumárenská technologie: Kaučuky [online]. 2005 [online] Dostupné z: <http://www.home.karneval.cz/0323339201/text/kaucuky.pdf>
- [13] MALÁČ, Jiří. Gumárenská technologie – Výrobky [online]. 2005 [online] Dostupné z: <http://www.home.karneval.cz/0323339201/text/vyrobky.pdf>

- [14] Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial and uniaxial stretching tests based on optical methods - ScienceDirect. ScienceDirect.com | Science, health and medical journals, full text articles and books. [online]. Copyright © 2008 Elsevier Ltd. All rights reserved. [cit. 12.05.2019]. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142941808001529?via%3Dihub>
- [17] ČSN EN ISO 868. Plasty a ebonit – Stanovení tvrdosti vtlačováním hrotu tvrdoměru (tvrdost Shore). Praha: Český normalizační institut, 2003.
- [18] Ing. Martin Fusek, Ph.D., Dr. Ing. Adámková Ludmila – Únava materiálu, [online] Dostupné: [http://projekty.fs.vsb.cz/463/edubase/VY\\_01\\_011/%C3%9Anava%20materi%C3%A1lu.pdf](http://projekty.fs.vsb.cz/463/edubase/VY_01_011/%C3%9Anava%20materi%C3%A1lu.pdf)